# Elementarna matematika 2

**Rješenja zadataka s vježbi**
Trinaesti tjedan

**Zadatak 1.** Odredite neku racionalnu parametrizaciju krivulje

$$C : x^2 + x = y^2 - y + 2.$$

**Rješenje.** Prvo nađimo neku točku na krivulji. To je npr. točka $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Opći oblik pravca kroz $(1, 1)$ je $y = tx - t + 1$. Uvrstimo sada taj izraz za $y$ u jednadžbu za $C$, dobivamo:

$$x^2 + x = (tx - t + 1)^2 - (tx - t + 1) + 2,$$

odnosno nakon sređivanja to postaje

$$(t^2 - 1)x^2 - (2t^2 - t + 1)x + t^2 - t + 2 = 0.$$

Znamo da je jedno rješenje $x_1 = 1$. Pomoću Vietine formule za umnožak rješenja, dobivamo drugo rješenje

$$x_2 = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 - 1}.$$

Uvrštavanjem u $y_2 = t(x_2 - 1) + 1$, dobivamo i $y$-koordinatu parametrizacije:

$$y_2 = t\left(\frac{t^2 - t + 2}{t^2 - 1} - 1\right) + 1 = \frac{3t - t^2}{t^2 - 1} + 1 = \frac{3t - 1}{t^2 - 1}.$$

Promotrimo još što se događa za vertikalan pravac $x = 1$ kroz $(1, 1)$. Za njega dobivamo $1 + 1 = y^2 - y + 2$, odnosno $y(y - 1) = 0$, pa je $y = 1$ ili $y = 0$. Točka $(1, 0)$ je jedina točka koja nije u slici parametrizacije. $\square$ $\square$

**Zadatak 2.** Odredite sve racionalne točke na krivulji $x^2 - 7y^2 = y + 1$.

**Rješenje.** Nađimo jednu racionalnu točku. To je na primjer točka $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Opći oblik pravca kroz $(x_0, y_0)$ s racionalnim koeficijentom smjera $t$ je $y = tx + t$. Uvrstimo to u jednadžbu dane hiperbole. Dobivamo

$$x^2 - 7(tx + t)^2 = tx + t + 1,$$

odnosno

$$(1 - 7t^2)x^2 - (14t^2 + t)x - 7t^2 - t - 1 = 0.$$

Jedno rješenje je $x_0 = -1$, a drugo je $x_2 = \frac{7t^2+t+1}{1-7t^2}$. Pripadna $y$-koordinata je

$$y_2 = t(x_2 + 1) = \frac{t^2 + 2t}{1 - 7t^2}.$$

Promotrimo još postoje li točke koje nisu obuhvaćene parametrizacijom. To su točke oblika $(-1, y)$, odnosno one koje leže na vertikalnom pravcu kroz $(-1, 0)$. Za $x = -1$, dobivamo

$$1 - 7y^2 = y + 1,$$

odnosno $y \in \{0, -1/7\}$. S obzirom da tangenta na krivulju u istaknutoj točki $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ nije vertikalna (a to vidimo jer vertikalni pravac kroz $(x_0, y_0)$ siječe krivulju dvaput u $(-1, 0)$ i $(-1, -1/7)$ pa nije tangenta), postoji racionalan broj $t_0$ koji je jednak koeficijentu smjera te tangente. Ako uvrstimo $t = t_0$ u parametrizaciju, dobit ćemo $(-1, 0)$. To znači da je $(-1, -1/7)$ jedina točka koja nije obuhvaćena parametrizacijom. Zaključujemo da je skup racionalnih točaka dan kao unija

$$\left\{ \left( \frac{7t^2 + t + 1}{1 - 7t^2}, \frac{t^2 + 2t}{1 - 7t^2} \right) : t \in \mathbb{Q} \right\} \cup \left\{ \left( -1, -\frac{1}{7} \right) \right\}. \quad \square$$

$\square$

**Zadatak 3.** Odredite sve parove racionalnih brojeva $(x, y)$ za koje vrijedi

$$x^3 + y^3 = 3(x + y).$$

**Rješenje.** Primijetimo da možemo faktorizirati lijevu stranu kao $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, pa je početna jednadžba ekvivalentna s

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0.$$

Onda je ili $x = -y$, ili je $x^2 - xy + y^2 = 3$. Preostaje odrediti racionalne točke na dobivenoj krivulji drugog reda. Primijetimo da je $P = (1, -1)$ jedna racionalna točka na krivulji. Opći oblik pravca kroz $P$ je $y = tx - t - 1$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo da je presjek pravca i krivulje dan s

$$x^2 - x(tx - t - 1) + (tx - t - 1)^2 = 3.$$

Nakon sređivanja, dobivamo

$$(t^2 - t + 1)x^2 - (2t^2 + t - 1)x + t^2 + 2t - 2 = 0.$$

Jedno rješenje je $x_1 = 1$, a drugo je prema Vietinim formulama

$$x_2 = \frac{t^2 + 2t - 2}{t^2 - t + 1}.$$

Pripadna $y$-koordinata je

$$y_2 = tx_2 - t - 1 = \frac{2t^2 - 2t - 1}{t^2 - t + 1}.$$

Primijetimo da ovo sve ima smisla, jer je $t^2 - t + 1 \neq 0$ za $t \in \mathbb{R}$. Preostaje još provjeriti vertikalni pravac kroz $P$, tj. $x = 1$. Za $x = 1$ dobivamo $1 - y + y^2 = 3$, odnosno $y^2 - y - 2 = 0$, pa su rješenja $y = -1$ i $y = 2$. Moramo dodati točku $(1, 2)$. Dakle, skup svih parova racionalnih brojeva za koje je zadovoljena početna jednadžba je

$$\left\{ \left( \frac{t^2 + 2t - 2}{t^2 - t + 1}, \frac{2t^2 - 2t - 1}{t^2 - t + 1} \right) : t \in \mathbb{Q} \right\} \cup \{(1, 2)\} \cup \{(t, -t) : t \in \mathbb{Q}\}. \quad \square$$

$\square$

**Zadatak 4.** Odredite racionalnu parametrizaciju krivulje

$$x^2 = 2y^2 - 8$$

povlačenjem pravaca kroz točku $P = (0, 2)$.

**Rješenje.** Jednadžba krivulje je $x^2 - 2y^2 = -8$. Točka $P = (0, 2)$ se nalazi na krivulji. Opći oblik pravca s koeficijentom smjera $t$ kroz točku $P$ je $y = tx + 2$. Uvrštavanjem u jednadžbu krivulje dobivamo:

$$(1 - 2t^2)x^2 - 8tx = 0.$$

Jedno rješenje je $x_1 = 0$. Drugo rješenje je $x_2 = \frac{8t}{1-2t^2}$. Pripadna $y$-koordinata je

$$y_2 = tx_2 + 2 = \frac{4t^2 + 2}{1 - 2t^2}.$$

Tražena racionalna parametrizacija je $Q(t) = \left(\frac{8t}{1-2t^2}, \frac{4t^2+2}{1-2t^2}\right)$. $\square$

**Zadatak 5.*** Odredite sve racionalne točke na krivulji $x^2 + y^2 = 3$.

**Rješenje.** Ispostavlja se da na zadanoj kružnici nema racionalnih točaka. Da to vidimo prvo ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju:

> **Lema.** Jednadžba $u^2 + v^2 = 3w^2$ nema rješenje za $u, v, w \in \mathbb{N}$.

*Dokaz leme.* Pretpostavimo da rješenje postoji i neka je onda $(u, v, w)$ prirodno rješenje za koje je $w$ najmanji moguć.

Općenito kvadrat cijelog broja $n$ može imati ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3. Konkretno ako je $n$ djeljiv s 3, onda je i $n^2$ također. Inače ako $n$ nije djeljiv s 3, tj. ima ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju, onda $n^2$ ima ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Tablica 1: Mogući ostaci od $u^2 + v^2$ pri dijeljenju s 3.

| $u^2$ \ $v^2$ | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 2 |

Iz tablice vidimo da je $u^2 + v^2$ djeljiv s 3 samo odna kada su $u$ i $v$ oboje dijeljivi s 3. Dakle imamo $u = 3u_1$, $v = 3v_1$ za neke $u_1, v_1 \in \mathbb{N}$. Tada

$$u^2 + y^2 = 3w^2 \implies 3(u_1^2 + v_1^2) = w^2 \implies 3 \mid w \implies w = 3w_1 \implies u_1^2 + v_1^2 = 3w_1^2.$$

Dakle $(u_1, v_1, w_1)$ je prirodno rješenje jednadžbe s $w_1 < w$ što je kontradikcija.

**Rješenje, nastavak.** Pretpostavimo da je $(x_0, y_0)$ racionalna točka na krivulji, tj. $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$. Uočimo da $x_0 \neq 0$ i $y_0 \neq 0$ jer bi onda neka od varijabla morala biti $\pm\sqrt{3}$ što je nemoguće jer je to iracionalan broj. Dakle postoje cijeli brojevi $a, b, c, d$, svi različiti od 0, takvi da $x_0 = a/b$ i $y_0 = c/d$. Tada imamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 3 \implies (ad)^2 + (bc)^2 = 3(bd)^2.$$

Dakle za $(u, v, w) = (|ad|, |bc|, |bd|)$ smo dobili prirodno rješenje jednadžbe $u^2 + v^2 = 3w^2$ što je kontradikcija s Lemom.

**Napomena.** Ovaj zadatak ilustrira da postoje krivulje drugog stupnja koje imaju realne, ali nemaju racionalne točke.

Ako izaberemo točku na krivulji, npr. $P = (0, \sqrt{3})$ i dalje možemo izvesti parametrizaciju pravcima kroz $P$. Opći oblik pravca s koeficijentom smjera $t$ kroz točku $P$ je $y = tx + \sqrt{3}$. Uvrštavanjem u jednadžbu krivulje dobivamo:

$$(1 + t^2)x^2 + 2\sqrt{3}tx = 0.$$

Jedno rješenje je $x_1 = 0$. Drugo rješenje je $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t}{1+t^2}$. Pripadna $y$-koordinata je

$$y_2 = tx_2 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

Dobivena parametrizacija je $Q(t) = \left(\frac{-2\sqrt{3}t}{1+t^2}, \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}\right)$. Uočimo da za različite vrijednosti $t$ dobijemo točke na krivulji, ali čak i ako uvrstimo racionalne vrijednosti $t$, parametrizacija nam očekivano neće dati racionalne točke. $\square$