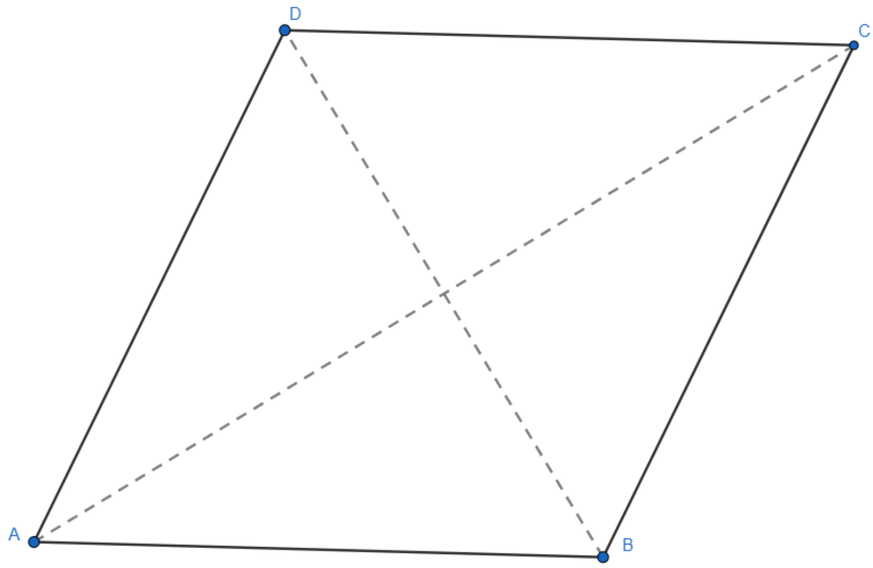
Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Drugi tjedan

Zadatak 1. U četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju kuteve četverokuta. Dokažite da je taj četverokut romb, tj. da su sve četiri stranice jednake duljine.

Rješenje. Neka je $ABCD$ taj četverokut.
Iz uvjeta zadatka znamo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$ i $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$.



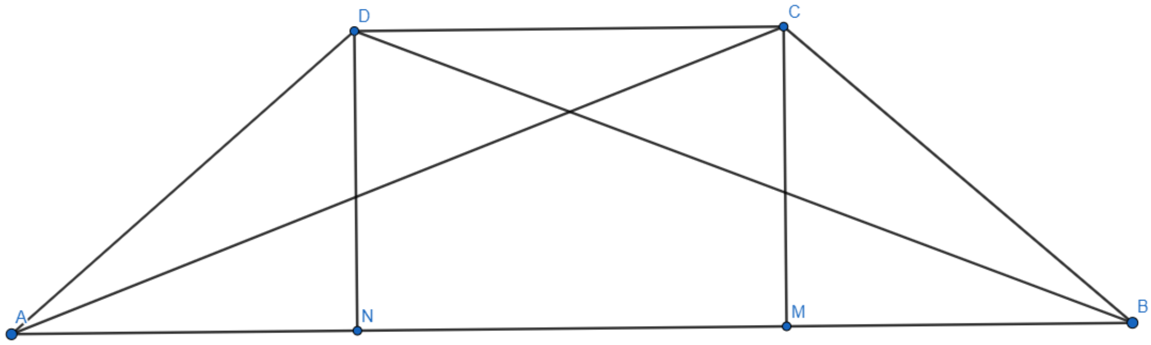
Pošto trokuti ABD i BCD imaju zajedničku stranicu BD, po KSK poučku zakljucujemo $\triangle ABD \cong \triangle BCD$. Iz toga imamo $|AB| = |BC|$ i $|AD| = |DC|$.
Analogno dobijemo $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ pa je $|AD| = |AB|$. Dakle,

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|.$$

$\square$

Zadatak 2. Dokažite da je trapez kojemu su dijagonale jednake duljine jednakokračan.

Rješenje. Znamo da je $|AC| = |BD|$. Treba dokazati $|AD| = |BC|$. Neka su M i N nožišta visina iz vrhova C i D na AB.



Tada vrijedi $|DN| = |CM|$ (visina trapeza), $|AC| = |BD|$ i $\measuredangle AMC = \measuredangle BND = 90°$. Po SSK$^>$ poučku je tada $\triangle AMC \cong \triangle BND$ pa posebno $|AM| = |BN|$.

Sada je

$$|AN| = |AB| - |NB| = |AB| - |AM| = |BM|, \quad |DN| = |CM|, \quad \measuredangle AND = \measuredangle BMC = 90°,$$

pa po SKS poučku zaključujemo $\triangle AND = \triangle BMC$ i $|AD| = |BC|$. □

Zadatak 3. Dokažite da je zbroj udaljenosti bilo koje točke unutar jednakostraničnog trokuta do njegovih stranice konstantan i jednak duljini visine trokuta.

Rješenje. Neka je a duljina stranice, a v duljina visine jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$, i T točka unutar trokuta, te A_0, B_0, C_0 presjeci okomica iz T na BC, CA, AB redom. Vrijedi:

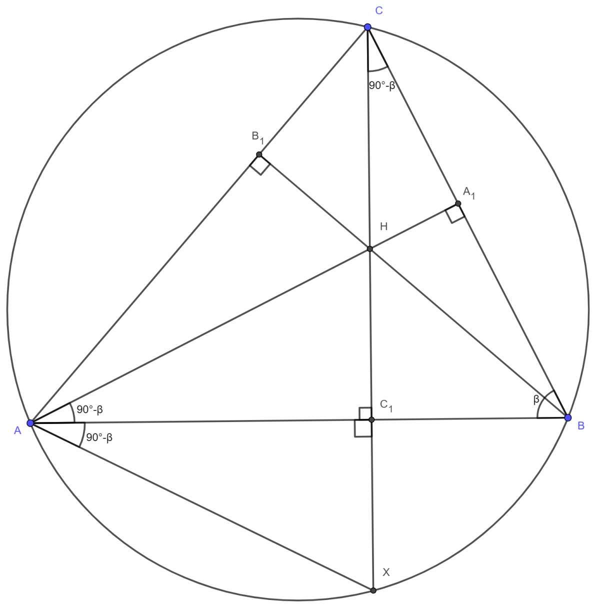
$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(ABT) + P(BCT) + P(CAT) \\ \frac{a \cdot v}{2} &= \frac{a \cdot |TC_0|}{2} + \frac{a \cdot |TA_0|}{2} + \frac{a \cdot |TB_0|}{2}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $|TA_0| + |TB_0| + |TC_0| = v$ što smo i trebali dokazati. □

Zadatak 4. Dokažite da točke simetrične ortocentru obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Rješenje. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ te A_1, B_1 i C_1 redom nožišta visina iz vrha A, B i C. Neka je točka X drugi presjek pravca CH i opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

Da bi dokazali da je točka X osnosimetrična slika točke H obzirom na AB dovoljno nam je dokazati da je $|XC_1| = |HC_1|$.



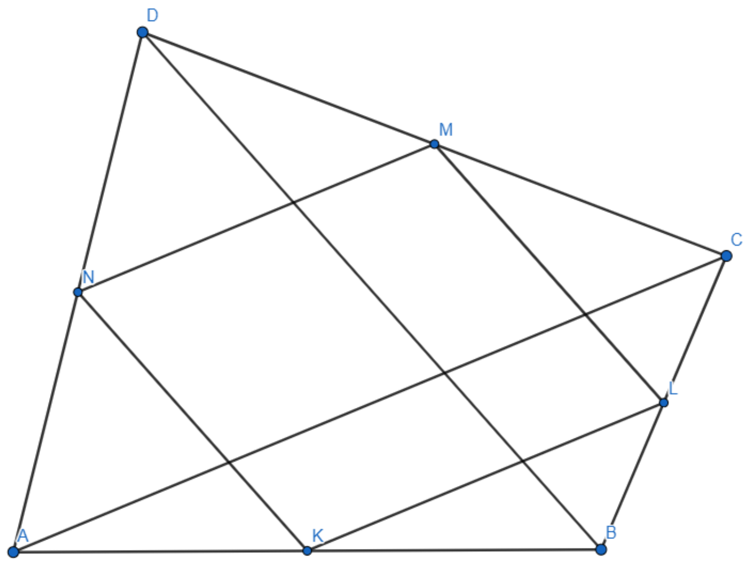
Imamo da je $\measuredangle XAC_1 = \measuredangle XAB = \measuredangle XCB$ jer su to obodni kutevi nad istim lukom. Nadalje, $\measuredangle XCB = \measuredangle C_1CB = 90^\circ - \beta$. Dakle, $\measuredangle XAC_1 = 90^\circ - \beta$.

Također je i $\measuredangle C_1AH = \measuredangle BAA_1 = 90^\circ - \beta$.

Kako su trokuti $\triangle XAC_1$ i $\triangle C_1AH$ pravokutni i imaju zajedničku stranicu $\overline{AC_1}$ prema poučku K-S-K zaključujemo da je $\triangle XAC_1 \cong \triangle HAC_1$ iz čega slijedi da je $|XC_1| = |HC_1|$. □

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ četverokut te neka su K, L, M i N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.

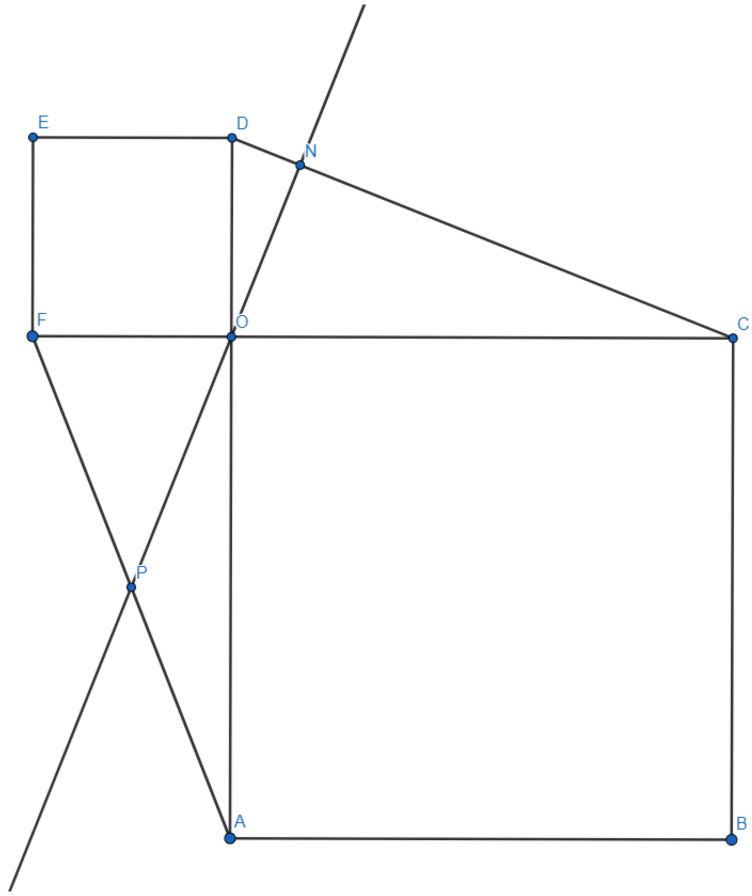
Rješenje. Povucimo dijagonalu AC četverokuta i primijetimo da je NM srednjica trokuta $\triangle ACD$.



Isto tako je KL srednjica trokuta ABC pa iz teorema o srednjici imamo $AC \parallel NM$ i $NM \parallel AC$ iz čega zaključujemo $NM \parallel KL$. Analogno preko dijagonale DB dobivamo $ML \parallel NK$, odnosno četverokut $NMLK$ je paralelogram. □

Zadatak 6. Neka su $ABCO$ i $DEFO$ kvadrati sa zajedničkim vrhom O u takvom položaju da se AD i CF sijeku u O. Ako je ON visina $\triangle CDO$, dokažite da pravac ON siječe dužinu AF u njenom polovištu.

Rješenje. Neka su a, b stranice odgovarajućih kvadrata.



Promotrimo trokute $\triangle ODC$ i $\triangle AFO$. Oba trokuta imaju stranice a i b te pravi kut među njima. Tada po SKS poučku dobijemo $\triangle ODC \cong \triangle AFO$, odnosno $\measuredangle OAF = \measuredangle OCD$ i $\measuredangle OFA = \measuredangle ODC$. Ako kut $\measuredangle ODC$ označimo sa α, iz trokuta $\triangle ODN$ i $\triangle OCN$ imamo

$$\measuredangle POA = \measuredangle NOD = 90^\circ - \alpha\,, \quad \measuredangle FOP = \measuredangle CON = 90^\circ - \measuredangle OCN = \alpha\,,$$

iz čega imamo $\measuredangle OFA = \measuredangle FOA = \alpha$ i $\measuredangle AOP = \measuredangle PAO = 90^\circ - \alpha$, odnosno $\triangle APO$ i $\triangle FOP$ su jednakokračni pa dobivamo

$$|FP| = |PO| = |PA|\,.$$

□

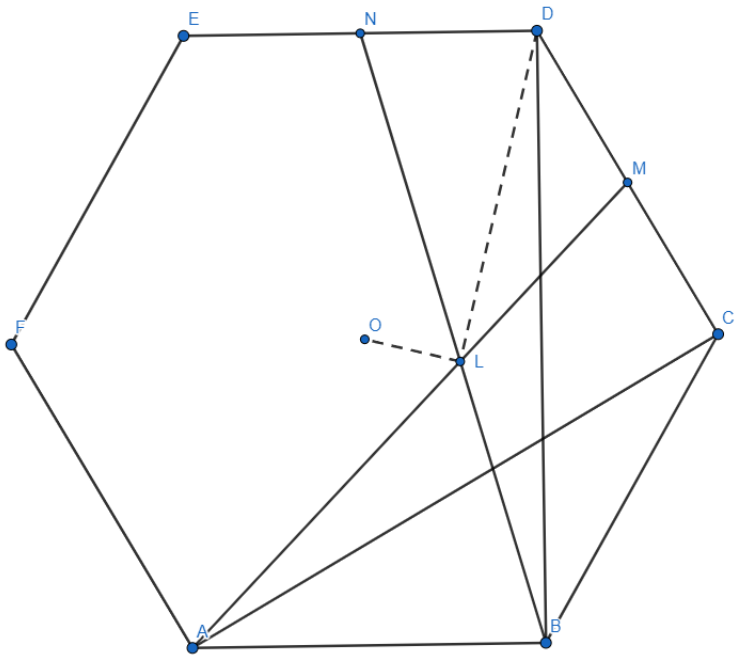
Zadatak 7. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica CD i DE, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite:

(a) $P(ABL) = P(DMLN)$,

(b) $\measuredangle ALO = \measuredangle OLN = 60^\circ$,

(c) $\measuredangle OLD = 90^\circ$.

Rješenje. (a) Neka a označava duljinu stranice šesterokuta. Povucimo dužine AC i BD. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BDC$ imaju dvije stranice a i kut od 120° među njima pa dobijemo da su oni sukladni.



Sada iz $|AC| = |BD|$, $|MC| = |DN| = a/2$ i

$$\measuredangle ACM = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ\,, \measuredangle BDN = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ\,,$$

zaključujemo $\triangle BDN \cong \triangle ACM$. Iz dobivenih sukladnosti možemo primijetiti da je $P(ABCM) = P(BCDN)$. Nadalje

$$P(ABL) = P(ABCM) - P(LMCB), \quad P(NLMD) = P(BCDN) - P(LMCB)\,,$$

pa dobivamo $P(ABL) = P(NLMD)$.

(b) Pošto je $\measuredangle OAB = 60^\circ$ i $\measuredangle MON = 60^\circ$, dužina AM prelazi u dužinu BN pri rotaciji oko O za 60°. Iz toga možemo zaključiti da je $\measuredangle MLN = 60^\circ$ i da je udaljenost od O do AM i BN jednaka. Tada po SSK$^>$ dobijemo da je OL simetrala kuta $\measuredangle ALN$ pa i

$$\measuredangle ALO = \measuredangle OLN = \frac{(180^\circ - \measuredangle MLN)}{2} = 60^\circ\,.$$

(c) Po KSK poučku možemo dobiti da je udaljenost točke D od pravca AM jednaka udaljenosti točke C od pravca AM. Pošto rotacijom dužine AM dobivamo dužinu BN, možemo zaključiti da je udaljenost točke D od BN jednaka udaljenosti točke C od AM odnosno

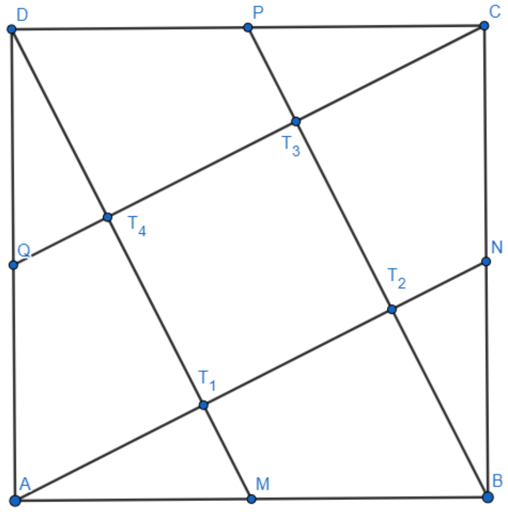
$$d(D, AM) = d(C, AM)\,, \quad d(D, BN) = d(C, AM)\,,$$

pa dobijemo da je točka D jednako udaljena od pravaca AM i BN. Sada je kao u (b) dijelu zadatka DL simetrala kuta $\measuredangle MLN$ iz čega dobivamo $\measuredangle OLD = 90^\circ$.

□

Zadatak 8. Točke M, N, P, Q redom su polovišta stranica AB, BC, CD, DA kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN, BP, CQ i DM omeđuju kvadrat.

Rješenje. Označimo s $T_1T_2T_3T_4$ četverokut kojeg omeđuju zadani pravci, kao na skici.



Neka je O središte kvadrata. Neka je τ rotacija oko O za 90°. Tada je

$$\tau(A) = B,\ \tau(B) = C,\ \tau(C) = D,\ \tau(D) = A,$$
$$\tau(M) = N,\ \tau(N) = P,\ \tau(P) = Q,\ \tau(Q) = M.$$

Primijetimo sljedeće: ako se dva pravca p i q sijeku u točki X, tada se i pravci $\tau(p)$ i $\tau(q)$ sijeku u točki $\tau(X)$.

Iz tog principa dobivamo da je

$$\tau(T_1) = \tau(MD \cap AN) = \tau(MD) \cap \tau(AN) = NA \cap BP = T_2.$$

Analogno možemo zaključiti $\tau(T_2) = T_3$, $\tau(T_3) = T_4$, $\tau(T_4) = T_1$.

Iz toga slijedi da je $T_1T_2T_3T_4$ kvadrat sa središtem O. $\square$