Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Deveti tjedan

Zadatak 1. Napišite kanonski oblik jednadžbe pravca koji je paralelan s ravninom $x+2y+3z = 8$, leži u ravnini $2x - y + z = 3$ te prolazi točkom $(1, 2, 3)$.

Rješenje. Pravac je paralelan s $x+2y+3z = 8$, pa je njegov vektor smjera okomit na normalu te ravnine. Ako je (v_x, v_y, v_z) vektor smjera, slijedi $v_x + 2v_y + 3v_z = 0$.

Pravac sadrži točku $(1, 2, 3)$, pa mu je parametarska jednadžba oblika $(1, 2, 3)+t(v_x, v_y, v_z)$.

Svaka točka pravca zadovoljava jednadžbu ravnine $2x - y + z = 3$, pa za svaki t vrijedi

$$2(1 + tv_x) - 2 - tv_y + 3 + tv_z = 3,$$

odnosno

$$2tv_x - tv_y + tv_z = 0.$$

Dakle, imamo sustav dvije linearne jednadžbe

$$\begin{aligned} v_x + 2v_y + 3v_z &= 0, \\ 2v_x - v_y + v_z &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge slijedi $v_z = v_y - 2v_x$, a uvrštavanjem u prvu slijedi $v_x + 2v_y + 3v_y - 6v_x = 0$, odnosno $v_x = v_y$. Dakle, rješenja jednadžbe su $(s, s, -s)$ za $s \in \mathbb{R}$, pa za koeficijent smjera možemo uzeti npr. $(1, 1, -1)$.

Parametarski oblik jednadžbe je $(1 + t, 2 + t, 3 - t)$, a kanonski je onda

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

□

Zadatak 2. Odredite sijeku li se pravci koji imaju sljedeće kanonske jednadžbe:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2},$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Rješenje. Pretvorimo jednadžbe pravca u parametarske. Nazovimo prvi pravac p, a drugi q. Onda je

$$p \ldots \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t, \\ z = 2t + 1, \end{cases}$$

te

$$q \ldots \begin{cases} x = s, \\ y = 3s - 1, \\ z = 4s + 2. \end{cases}$$

Pravci se sijeku ako i samo ako sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} t - 1 &= s \\ t &= 3s - 1, \\ 2t + 1 &= 4s + 2 \end{aligned}$$

ima realno rješenje (t, s). Jednostavno se metodama linearne algebre provjeri da taj sustav nema rješenja; npr. možemo s zamijeniti s $t - 1$ u drugoj i trećoj jednadžbi, te vidimo da ne postoji t koji zadovoljava obje jednadžbe. $\square$

Zadatak 3. Odredite jednadžbu ravnine paralelne s vektorom $(2, 1, -1)$ koja x-os siječe u točki $(3, 0, 0)$ i y-os siječe u točki $(0, -2, 0)$.

Rješenje. Normala ravnine je okomita na $(2, 1, -1)$, te ravnina sadrži točke $(3, 0, 0)$ i $(0, -2, 0)$.

Neka je $Ax + By + Cz = D$ jednadžba ravnine. Tada je $3A + D = 0$, $-2B + D = 0$ i $2A + B - C = 0$.

To znači da A, B, C možemo izraziti preko D. Imamo $A = -\frac{D}{3}$, $B = \frac{D}{2}$ i $C = 2A + B = -\frac{D}{6}$.

Uzimanjem $D = 6$ (slobodni smo skalirati jednadžbu) dobivamo jednadžbu ravnine

$$-2x + 3y - z + 6 = 0.$$

$\square$

Zadatak 4. Odredite zajedničku normalu (pravac okomit na oba pravca koji siječe oba pravca) sljedećih pravaca:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0},$$

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}.$$

Rješenje. Vektor smjera zajedničke normale je okomit na vektore smjerova oba zadana pravca. Njihovi koeficijenti smjerova su $(1, 1, 0)$ i $(0, 1, 0)$.

Ako označimo koeficijent smjera traženog pravca s (v_x, v_y, v_z), slijedi da je $v_x + v_y = 0$ i $v_y = 0$, pa je koeficijent smjera traženog pravca $(0, 0, 1)$ i pravac ima parametrizaciju oblika $(x_0, y_0, z_0 + t)$ za neku točku (x_0, y_0, z_0) s pravca.

Još preostaje iskoristiti uvjet da pravac siječe oba zadana pravca. Neka je A sjecište s prvim pravcem i B sjecište s drugim pravcem. Tada je $\overrightarrow{AB}$ proporcionalno koeficijentu smjera traženog pravca, iz čega vidimo da su x-koordinata i y-koordinata sjecišta s oba pravca iste.

$\square$

Zadatak 5. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T = (2, 3, 1)$ na ravninu

$$\pi \ldots x + y - z - 7 = 0,$$

te odredite točku T' simetričnu točki T obzirom na π.

Rješenje. Predstavit ćemo dva načina rješavanja: geometrijski i linearnoalgebarski.

Geometrijski način je sljedeći. Vektor zadan točkom T i njenom ortogonalnom projekcijom je okomit na ravninu, pa je paralelan normali te ravnine. Dakle, ortogonalna projekcija $p(T)$ zadovoljava $\overrightarrow{p(T)T} = \lambda(1, 1, -1)$, te $\pi(T) \in \pi$.

Neka je $p(T) = (x_0, y_0, z_0)$. Onda je

$$(2 - x_0, 3 - y_0, 1 - z_0) = (\lambda, \lambda, -\lambda),$$

Što daje tri jednadžbe s 4 nepoznanice. Četvrta jednadžba je $x_0 + y_0 - z_0 - 7 = 0$.

Iz prve tri jednadžbe možemo sve izraziti preko λ i uvrstiti u četvrtu. Dobivamo $x_0 = 2-\lambda$, $y_0 = 3 - \lambda$, $z_0 = 1 + \lambda$, pa je

$$x_0 + y_0 - z_0 = 4 - 3\lambda = 7,$$

odnosno $\lambda = -1$ i $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 0)$. Točka T' je takva da je $\frac{T+T'}{2} = (3, 4, 0)$, odnosno $T' = (6, 8, 0) - T = (4, 5, -1)$.

Linearnoalgebarski način je sljedeći. Translatirajmo problem tako da z zamijenimo sa $z + 7$ zato da bi ravnina na koju projiciramo prolazila kroz ishodište. Onda je nova točka T jednaka $(2, 3, 8)$, a nova ravnina π je $x + y - z = 0$. Na kraju se samo trebamo sjetiti translatirati nazad.

Ortogonalna projekcija točke na ravninu kroz ishodište je najbolja aproksimacija vektora $(2, 3, 8)$ vektorom iz ravnine.

Nju dobijemo na način da uzmemo ortonormiranu bazu (e_1, e_2) za ravninu, i onda je

$$p(T) = (T \cdot e_1)e_1 + (T \cdot e_2)e_2.$$

Baza za ravninu $x + y - z = 0$ je $(1, -1, 0)$ i $(1, 1, 2)$. Ti vektori su već međusobno okomiti, pa ih treba skalirati da bi dobili ortonormiranu bazu:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2). \end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned} (T \cdot e_1)e_1 + (T \cdot e_2)e_2 &= \frac{1}{2}((2, 3, 8) \cdot (1, -1, 0))(1, 1, 0) + \frac{1}{6}((2, 3, 8) \cdot (1, 1, 2))(1, 1, 2) \\ &= \frac{-1}{2}(1, -1, 0) + \frac{7}{2}(1, 1, 2) \\ &= (3, 4, 7). \end{aligned}$$

Konačno, vraćanjem z koordinate nazad na $z - 7$ dobivamo $p(T) = (3, 4, 0)$.

Točku T' izračunamo kao u prvom rješenju.

□

Zadatak 6. Odredite ortogonalnu projekciju točke $T = (2, 3, 1)$ na pravac p zadan parametarski s

$$p = \begin{cases} x = t - 2, \\ y = 2t - 1, \\ z = -2t + 4. \end{cases}$$

Rješenje. Ponovno ćemo zadatak prvo riješiti geometrijski, a onda linearnoalgebarski.

Geometrijski, potrebno je pronaći točku $\pi(T)$ na pravcu p takvu da je $\overrightarrow{T\pi(T)}$ okomit na vektor smjera od p, koji je $(1, 2, -2)$. Ako je $\pi(T) = (x_0, y_0, z_0)$, onda je uvjet $(x_0 - 2) + 2(y_0 - 3) - 2(z_0 - 1) = 0$, odnosno $x_0 = 2z_0 - 2y_0 + 6$.

Osim toga, (x_0, y_0, z_0) leži na pravcu p, pa postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\begin{aligned} 2z_0 - 2y_0 &= t - 8, \\ y_0 &= 2t - 1, \\ z_0 &= -2t + 4. \end{aligned}$$

Ovo je sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice. Oduzimanjem druge jednadžbe od treće dobivamo $z_0 - y_0 = -4t + 5$, pa je $2z_0 - 2y_0 = t - 8 = -8t + 10$, odnosno $t = 22$, i $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$.

Linearno algebarski, ponovno možemo translatirati pravac tako da prolazi kroz ishodište, tako da x zamijenimo s $x + 2$, y zamijenimo s $y + 1$ i z zamijenimo s $z - 4$. Drugim riječima, napravili smo translaciju za vektor $(2, 1, -4)$, pa ćemo na kraju rješenja translatirati unazad.

Točka T se onda translatira u $(4, 4, -3)$, a pravac p ima jednadžbu $(x, y, z) = (t, 2t, -2t)$.

Ortogonalna projekcije točke na pravac kroz ishodište je najbolja aproksimacija vektora $(4, 4, -3)$ vektorom iz jednodimenzionalnog potprostora $(t, 2t, -2t)$, i dana je s $\pi(T) = (T, e_1)e_1$, gdje je $\{e_1\}$ ortonormirana baza za pravac. Možemo uzeti $e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, pa je $\pi(T) = \frac{1}{9}(18)(1, 2, -2) = (2, 4, -4)$.

Sada translatirajmo nazad, odnosno oduzmimo $(2, 1, -4)$ i dobivamo točku $\pi(T) = (0, 3, 0)$.

$\square$

Zadatak 7. Odredite ortogonalnu projekciju pravca p danog implicitno s

$$p = \begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

na ravninu

$$\pi \ldots 2x + 2y + z = 5.$$

Rješenje. Ortogonalna projekcija pravca se najjednostavnije dobije tako da se nađe ortogonalna projekcija dvije točke, i onda uzme pravac kroz njih.

Još je lakše ako pravac siječe ravninu, jer je ortogonalna projekcija točke koja leži na ravnini jednaka njoj samoj. Stoga pronađimo sjecište pravca i ravnine. Za to treba riješiti sustav

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ x + y + z &= 3, \\ 2x + 2y + z &= 5. \end{aligned}$$

Dobivamo rješenje $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Uzmimo sada još jednu točku s pravca, recimo $(0, 1, 2)$ i odredimo njenu ortogonalnu projekciju na π.

Neka je (x_1, y_1, z_1) ta projekcija. Onda je $(x_1, y_1 - 1, z_1 - 2)$ paralelno s vektorom normale $(2, 2, 1)$ na π i leži na π.

Imamo $x_1 = 2\lambda$, $y_1 = 2\lambda + 1$, $z_1 = \lambda + 2$, i $2(2\lambda) + 2(2\lambda + 1) + \lambda + 2 = 5$, tj. $9\lambda = 1$ i $\lambda = \frac{1}{9}$, iz čega dobijemo $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, \frac{19}{9}\right)$. Konačno, pravac kroz $(1, 1, 1)$ i $\left(\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, \frac{19}{9}\right)$ je lako odrediti. Dobivamo

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{7}{9}t \\ y = 1 + \frac{2}{9}t \\ z = 1 + \frac{10}{9}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\square$