Drugi dio

ZADATAK 4.12. Neka su X, Y, Z, W diskretne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru te takve da sve imaju konačan drugi moment. Pokažite da vrijedi

(a) $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$

(b) $\mathrm{Cov}(X + Y, Z + W) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(X, W) + \mathrm{Cov}(Y, Z) + \mathrm{Cov}(Y, W)$.

ZADATAK 4.13. Bacamo simetričnu kocku. Neka je X broj bacanja do pojave prve šestice, a Y broj bacanja do pojave treće šestice.

(a) Odredite diskretnu funkciju gustoće slučajnog vektora (X, Y).

(b) Odredite $\mathrm{Cov}(X, Y)$ i $\rho(X, Y)$.

ZADATAK 4.14. Neka je Θ slučajan kut koji ima uniformnu razdiobu na skupu $\{\frac{k\pi}{4} : k = 0, \ldots, 7\}$, te $(X, Y) := (\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Pokažite da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, ali da X i Y nisu nezavisne.

ZADATAK 4.15 (**CS nejednakost**). (a) Neka je cijena benzina po litri u danom mjesecu slučajna varijabla X takva da je $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = 1$. S druge strane, mjesečna potrošnja vašeg auta (u litrama) je slučajna varijabla Y za koju vrijedi $\mathbb{E}[Y] = 30$ i $\mathrm{Var}(Y) = 5^2$. Pokažite da je očekivana vrijednost vašeg ukupnog mjesečnog troška na gorivo nužno unutar segmenta $[25, 35]$.

(b) Ako je X nenegativna slučajna varijabla, pokažite da za svaki $k \geqslant 1$ vrijed $\mathbb{E}[X^k]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^{2k}]$.

ZADATAK 4.16. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable s očekivanjem $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ te $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Odredite $\mathbb{E}[S_n]$ za $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$, gdje je $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$; S_n je jedan mogući procjenitelj za varijancu σ^2. Imate li ideju za alternativni procjenitelj varijance?

ZADATAK 4.17. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable za koje postoji očekivanje, te neka je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pokažite da je $\mathbb{E}[X_i \mid S_n = s] = \frac{s}{n}$, za sve $i = 1, \ldots, n$ i sve s takve da je $\mathbb{P}(S_n = s) > 0$. *Uputa:* Što možete reći o $\mathbb{E}[X_i \mid S_n = s]$ i $\mathbb{E}[X_j \mid S_n = s]$?

ZADATAK 4.18. Neka je X broj dana u godini u kojima barem jedna osoba u grupi od 110 ljudi ima rođendan; pretpostavka je da imamo 365 dana u godini, te da svaka osoba nezavisno od ostalih može imati rođendan na bilo koji dan u godini s jednakom vjerojatnosti. Odredite $\mathrm{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite indikatore.

ZADATAK 4.19. (a) Ako je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$, a $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. diskretnih slučajnih varijabli nezavisan od N, te $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$, pokažite da vrijedi

$$\mathrm{Var}(S_N) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2\mathrm{Var}(N)\,,$$

ukoliko je $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.

(b) Paralelno bacamo dvije simetrične kocke dok na prvoj ne padne šestica. Odredite očekivanje i standardnu devijaciju zbroja brojeva koji su pali na drugoj kocki.

ZADATAK 4.20. Bacamo 10 simetričnih kocki, te označimo s X broj parnih brojeva, a s Y broj jedinica koje su pale.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) te $\rho(X, Y)$. Koje su marginalne razdiobe od X i Y, te jesu li X i Y nezavisne?

(b) Ako znamo da nije pala niti jedna trojka ili petica, kako to mijenja razdiobu od (X, Y)?

(c) Ako umjesto 10, bacamo $N \sim \mathrm{P}(10)$ kocki, te su ishodi bacanje kocki nezavisni od N, odredite zajedničku razdiobu od (X, Y).

(d) Ako je P broj prostih brojeva koji su pali, odredite $\rho(X, P)$.

ZADATAK 4.21. *Inverzija* u permutaciji π skupa $\{1, \ldots, n\}$ je par $i < j$ takav da je $\pi(i) > \pi(j)$. Odredite očekivanje i varijancu broja inverzija u slučajno odabranoj permutaciji. *Uputa:* Koristite indikatore.

Rješenja zadataka: **Zad. 4.13** (a) $f_{(X,Y)}(n, m) = \frac{(m-n-1)5^{m-3}}{6^m}$, za $m \geqslant n+2, n \geqslant 1$, (b) 30; **Zad. 4.16** $(1 - \frac{1}{n})\sigma^2$; **Zad. 4.18** $\mathrm{Var}(X) \approx 10.019$; **Zad. 4.19**(b) $21, \approx 19.62$; **Zad. 4.20** (a) $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \frac{10!}{a!b!(10-a-b)!} \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^b \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-a-b}$, za $0 \leqslant a + b \leqslant 10$, $\rho(X, Y) = -\sqrt{1/5}$, $X \sim \mathrm{B}(10, 1/2), Y \sim \mathrm{B}(10, 1/6)$, (b) $\mathbb{P}(X = a, Y = b \mid A) = \frac{10!}{a!b!} \left(\frac{3}{4}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^b$, za $a, b \geqslant 0$, $a + b = 10$, (c) $X \sim \mathrm{P}(5), Y \sim \mathrm{P}(5/3)$ te su nezavisne, (d) $-\frac{1}{3}$. **Zad. 4.21** $\frac{n(n-1)}{4}$, $\frac{n(n-1)}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)}{36}$