POGLAVLJE 5

Neprekidne slučajne varijable

ZADATAK 5.1. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite vrijednost konstante c i izračunajte $\mathbb{P}(X > 1)$.

ZADATAK 5.2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2}, \quad \text{za sve } x > 0.$$

Odredite vrijednost konstante C i izračunajte $\mathbb{P}(X > 2)$ i $\mathbb{P}(1 < X < 3)$. Odredite funkciju gustoće f.

ZADATAK 5.3. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, pronađite funkciju $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ takvu da slučajna varijabla $Y := f(U)$ ima razdiobu iz Zadatka 5.2.

ZADATAK 5.4. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(a,b)$, a $(c,d) \subseteq (a,b)$, odredite razdiobu slučajne varijable U uvjetno na događaj $\{U \in (c,d)\}$.

ZADATAK 5.5.
(a) Ako su F_1, F_2 dvije funkcije distribucije te $p \in [0,1]$ proizvoljan. Pokažite da je tada funkcija F zadana s $F(x) := pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$ također funkcija distribucije neke slučajne varijable. Ako znamo generirati slučajne varijable s funkcijom distribucije F_1, odnosno F_2, kako biste generirali slučajnu varijablu s funkcijom distribucije F?
(b) Bacamo nesimetričan novčić na kojemu je vjerojatnost da padne pismo jednaka $1/3$. Generiramo slučajnu varijablu X na sljedeći način: ako je novčić pokazao pismo, stavimo $X := 0$, a ako je pala glava generiramo $E \sim \mathrm{Exp}(2)$ slučajnu varijablu te stavimo $X := E$. Odredite funkciju distribucije od X. Je li X neprekidna slučajna varijabla? Je li diskretna?

ZADATAK 5.6.
(a) Neka je R radijus slučajno odabrane točke iz jediničnog kruga. Odredite gustoću slučajne varijable R, te njeno očekivanje i varijancu. Ima li R uniformnu razdiobu na $(0,1)$?
(b) Neka je $R \sim \mathrm{Exp}(1)$, te A površina kruga s radijusom R. Odredite funkciju distribucije, gustoću, te očekivanje slučajne varijable A. *Uputa: Korisno je koristiti formulu* $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$ *koja zapravo vrijedi za proizvoljnu nenegativnu slučajnu varijablu* X.

ZADATAK 5.7. Ako je X neprekidna slučajna varijabla i $Y := aX + b$ za $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, pokažite da je Y neprekidna s gustoćom

$$f_Y(y) = f_X((y-b)/a) \cdot \frac{1}{|a|}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Možete pretpostaviti da je F_X diferencijabilna osim u najviše konačno mnogo točaka, te da je $F'_X(t) = f_X(t)$ za sve t gdje derivacija postoji.

ZADATAK 5.8. Pretpostavimo da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati. Kada bi student najkasnije trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću barem 95% ne zakasni na predavanje?

ZADATAK 5.9. Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ i $Y := |X|$ tzv. preklopljena (engl. *folded*) normalna slučajna varijabla.

(a) Odredite funkciju distribucije od Y, te ju izrazite u terminima funkcije distribucije Φ standardne normalne razdiobe. Ako je $\mu = -1$, $\sigma = 2$, te znate da je $\Phi(1) \approx 0.84, \Phi(2) \approx 0.98$, odredite $\mathbb{P}(Y < 3)$.

(b) Slučajna varijabla Y je neprekidna (to slijedi npr. jer joj je funkcija distribucije neprekidna, te diferencijabilna osim u konačno mnogo točaka) – odredite joj funkciju gustoće. Skicirajte gustoću ako je $\mu = \sigma = 1$; odavde dolazi ime "preklopljena".

(c) Pokažite da je

$$\mathbb{E}[Y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu\left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right],$$

te da je

$$\mathrm{Var}(Y) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbb{E}[Y]^2.$$

ZADATAK 5.10. Odredite $\mathrm{Var}(X)$ ako je

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

(b) $\mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha}$, za $x \geqslant 1$, te $\mathbb{P}(X > x) = 1$ za $x < 1$, pri čemu je $\alpha > 1$; kažemo da X ima Paretovu razdiobu s parametrom α. Inače se dopušta da je $\alpha > 0$ – zašto je ovdje potrebno da je $\alpha > 1$?

ZADATAK 5.11. (a) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F i funkcijom gustoće f.[1] Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajnih varijabli $L_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$ i $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ u terminima F i f.

(b) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da L_n također ima eksponencijalnu razdiobu te joj odredite parametar. *Napomena:* Što ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne eksponencijalne, ali s različitim parametrima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$?

[1] Smijete pretpostaviti da vrijedi $F'(t) = f(t)$ osim u najviše konačno mnogo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Ako su $X_1, \dots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da je

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda}\,.$$

Možete li intuitivno objasniti rezultat s obzirom na rezultat iz (b) dijela i svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe?

Uputa: Pokažite da je $\mathbb{E}[M_k] - \mathbb{E}[M_{k-1}] = \frac{1}{k\lambda}$, za $k \geqslant 1$, tako što ćete koristeći formulu $\mathbb{E}[M_k] = \int_0^\infty \mathbb{P}(M_k > t)\mathrm{d}t$ u dobivenom izrazu prepoznati gustoću od M_k.

Rješenja zadataka: **Zad. 5.1** $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$; **Zad. 5.2** 1, e^{-4}, $e^{-1} - e^{-9}$, $f(x) = 2xe^{-x^2}$, $x > 0$, $f(x) = 0$, $x \leqslant 0$; **Zad. 5.3** npr. $f(u) = \sqrt{-\log u}$ **Zad. 5.4** $\mathrm{Unif}(c, d)$; **Zad. 5.5** $F(x) = (1 - \frac{2}{3}e^{-2x})1_{\{x \geqslant 0\}}$, ne, ne; **Zad. 5.6** (a) $f(r) = 2r, r \in [0, 1]$ (0 inače), $\mathbb{E}[R] = \frac{2}{3}$, $\mathrm{Var}(R) = \frac{1}{18}$, (b) $F(a) = (1 - e^{-\sqrt{a/\pi}})1_{\{a \geqslant 0\}}$, $\mathbb{E}[A] = 2\pi$; **Zad. 5.8** 11:23; **Zad. 5.10** (a) $1/\lambda^2$; (b) $+\infty$ za $\alpha \leqslant 2$, $\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, inače; **Zad. 5.10**(a) $F_{L_n}(t) = 1 - (1 - F(t))^n$, $f_{L_n}(t) = n(1 - F(t))^{n-1} f(t)$, $F_{M_n}(t) = F(t)^n$, $f_{M_n}(t) = nF(t)^{n-1} f(t)$, (b) $L_n \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.