

Funkcije izvodnice

ZADATAK 6.1. Paralelno bacamo dvije simetrične kocke dok na prvoj ne padne šestica. Odredite FI vjerojatnosti $G(s)$ zbroja brojeva koji su pali na drugoj kocki, za $|s| < 1$.

ZADATAK 6.2. Uzastopno bacamo simetričnu kocku sve dok prvi put ne dobijemo dvije šestice zaredom – označimo s X potreban broj bacanja.

(a) Ako je $p_n := \mathbb{P}(X = n)$ za $n \geq 1$, pokažite da vrijedi

$$p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}p_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

(b) Koristeći (a) dio, odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X te odredite očekivanje i standardnu devijaciju od X .

ZADATAK 6.3. Bacimo 6 simetričnih kocki, te s X označimo njihovu sumu. Odredite $\mathbb{P}(X = 18)$. *Uputa:* Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti $G_X(t)$ od X , razvijte je u red potencija (oko 0), te pronađite koeficijent koji stoji uz t^{18} .

ZADATAK 6.4. Neka slučajna varijabla X ima funkciju izvodnicu momenata M_X na $(-t_0, t_0)$. Pokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M(at), \quad |t| \cdot |a| < t_0.$$

ZADATAK 6.5. Neka je X slučajna varijabla. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je

(a) $X \sim \text{Unif}(a, b)$;

(b) $X \sim \text{B}(n, p)$. Koja je veza s FI vjerojatnosti G_X ?

ZADATAK 6.6. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, za $\alpha, \lambda > 0$. Zaključite da za $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ i $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ vrijedi $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$. Uočite da ovaj rezultat i intuitivno ima smisla imajući u vidu da za $k \in \mathbb{N}$, suma k nezavisnih $\text{Exp}(\lambda)$ slučajnih varijabli ima točno $\Gamma(k, \lambda)$ razdiobu. *Napomena:* Gustoća $\Gamma(\alpha, \lambda)$ razdiobe je

$$f_{\Gamma(\alpha, \lambda)}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

ZADATAK 6.7. Ako je $Z \sim \text{N}(0, 1)$, odredite $\mathbb{E}[Z^n]$, za sve $n \geq 1$. *Uputa:* Razvijte $M_Z(t)$ u red potencija oko 0.

ZADATAK 6.8. Slučajna varijabla X ima log-normalnu razdiobu s parametrima μ, σ^2 ako je $\log(X) \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\text{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite funkciju izvodnicu momenata normalne slučajne varijable.

ZADATAK 6.9. Ako su $X_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, nezavisne te

$$\hat{\mu}_n := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

procjenitelj za μ , izračunajte "grešku" $\mathbb{E}[|\hat{\mu}_n - \mu|]$. Kako X_i -evi za koje je $\sigma_i \approx 0$, odnosno $\sigma_i \approx \infty$, utječu na $\hat{\mu}_n$ i $\mathbb{E}[|\hat{\mu}_n - \mu|]$? Usporedite s (naivnim) procjeniteljem $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (vidi predavanja). Uputa: Iz Zadatka 5.9 znamo da za $Z \sim N(0, \sigma^2)$ vrijedi $\mathbb{E}[|Z|] = \sigma\sqrt{2/\pi}$.

Rješenja zadataka: **Zad. 6.1** $\frac{s-s^7}{5s^7-41s+36}$; **Zad. 6.2(b)** $G_X(s) = \frac{s^2}{36-30s-5s^2}$, $|s| \leq 1$, $\mathbb{E}[X] = 42$, $\sigma(X) \approx 40.62$; **Zad. 6.3** $\frac{3431}{6^6}$; **Zad. 6.5** (a) $\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$ za $t \neq 0$, te 1 za $t = 0$, (b) $(q + pe^t)^n$, $t \in \mathbb{R}$; **Zad. 6.6** $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$, $t < \lambda$; **Zad. 6.7** $\mathbb{E}[Z^{2k}] = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1$, $\mathbb{E}[Z^{2k-1}] = 0$, $k \geq 1$; **Zad. 6.8** $\mathbb{E}[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$, $\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$; **Zad. 6.9** $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1/2}$.