POGLAVLJE 7

Neprekidni slučajni vektori

Zadatak 7.1. Neka X i Y imaju zajedničku funkciju gustoće

$$f(x,y) = c(x+y)\,, \quad x,y \in (0,1)\,,$$

te $f(x,y) = 0$ inače.

(a) Odredite konstantu $c > 0$.

(b) Odredite $\mathbb{P}(X+Y \leqslant 1)$ – očekujete li da je ta vjerojatnost veća ili manja od $\frac{1}{2}$?

(c) Odredite $\mathbb{E}[X+Y]$.

(d) Odredite marginalne gustoće od X i Y. Jesu li X i Y nezavisne?

(e) Odredite uvjetnu gustoću od Y uz dano $X = x$, za $x \in (0,1)$.

Zadatak 7.2. Štap duljine 1 prelomimo na uniformno odabranom mjestu X. Uvjetno na $X = x \in (0,1)$, dio štapa $[0,x]$ ponovno prelomimo na uniformno odabranom mjestu Y. Na predavanjima smo pokazali da je zajednička gustoća

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in (0,1),\, y \in (0,x)\,,$$

te $f_{X,Y}(x,y) = 0$ za ostale (x,y). Odredite

(a) marginalnu gustoću od Y;

(b) gustoću od X uz dano $Y = y$, za $y \in (0,1)$ – intuitivno, očekujemo li da je to uniformna razdioba na $(y,1)$?

Zadatak 7.3. Neka su $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ i $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$ nezavisne. Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[|X-Y|\Big] = \frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}\,,$$

na dva načina:

(a) koristeći formulu za $\mathbb{E}[g(X,Y)]$, te

(b) koristeći jednakost $|X-Y| = \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$.
Uputa: Koristite formulu $\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)\,dz$, koja vrijedi za neprekidnu nenegativnu slučajnu varijablu Z.

Možete li intuitivno objasniti rezultat koristeći činjenicu da je $\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = X) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ te svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe?

Zadatak 7.4. Ako je (X,Y) neprekidan slučajan vektor, te $X,Y \geqslant 0$, dokažite da vrijedi

(a) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

(b) $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$ ako je $X \leqslant Y$. *Uputa:* Imamo $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X1_{\{X \leqslant Y\}}] = \mathbb{E}[g(X,Y)]$.

(c) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ ako su X i Y nezavisne.

Zadatak 7.5 (**Očekivanje** Beta **razdiobe**). Ako je $X \sim \text{Beta}(a, b)$, za $a, b > 0$, pokažite da je $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$. *Uputa:* Iskoristite identitete

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

te $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, za sve $a, b > 0$.

Zadatak 7.6. Neka su $X_1, \dots, X_n$ njd neprekidne slučajne varijable.

(a) Pokažite da je $\mathbb{P}(\{X_i \neq X_j\,,\ \forall i \neq j\}) = 1$.
(b) Odredite $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \ldots < X_{\pi(n)})$, za proizvoljnu permutaciju π skupa $\{1, \dots, n\}$.

Zadatak 7.7. (a) Imamo n bijelih i jednu sivu kuglicu, te sve kuglice nezavisno i uniformno rasporedimo po segmentu $[0, 1]$. Ako je X broj bijelih kuglica koje se nalaze s lijeve strane sive kuglice, pokažite da X ima uniformnu razdiobu na skupu $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, te zaključite da vrijedi

$$\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{1}{n+1}\,, \quad \forall k = 0, \dots, n\,.$$

Uputa: Mijenja li se razdioba od X ako prvo rasporedimo $n+1$ bijelih kuglica pa tek onda slučajno obojamo jednu od kuglica u sivo?

(b) Testiramo novi lijek za jednu bolest, koji ćemo ispitati na n pacijenata. Pretpostavimo da je parametar uspješnosti lijeka $P \in (0, 1)$ slučajan, te da ima $\text{Unif}(0, 1)$ distribuciju. Uvjetno na $P = p$, svaki od n pacijenata bit će izliječen s vjerojatnošću p, nezavisno od ostalih. Označimo s N ukupan broj pacijenata kojima je lijek pomogao.

(b1) Odredite distribuciju slučajne varijable N u ovom modelu.
(b2) Pretpostavimo da je svih n pacijenata ozdravilo nakon što su primili lijek. Koliko je vjerojatnost da je $P > 0.5$?

Zadatak 7.8. Neka je Y Poissonova slučajna varijabla sa slučajnim parametrom Λ koji ima $\Gamma(\alpha, \beta)$ distribuciju, za $\alpha, \beta > 0$; gustoća $\Gamma(\alpha, \beta)$ razdiobe je

$$f_{\Gamma(\alpha,\beta)}(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

(a) Pokažite da uvjetno na ishod $Y = y$, za $y \in \mathbb{N}_0$, parametar Λ ponovno ima gama razdiobu, te joj odredite parametre. Za koje y je očekivanje aposteriorne razdiobe veće od $\mathbb{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}$?
(b) Ako je $\alpha \in \mathbb{N}$, pokažite da Y ima negativnu binomnu razdiobu na $\mathbb{N}_0$ te joj odredite parametre.
(c) Riješite (a) dio zadatka ako umjesto na $\{Y = k\}$, uvjetujemo na $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$ gdje su, uvjetno na $\Lambda = \lambda$, $Y_1, \dots, Y_n$ njd slučajne varijable s $\text{P}(\lambda)$ distribucijom, te $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljni. *Napomena:* Bayesova formula za neprekidnu slučajnu varijabli Λ i diskretan slučajan vektor $(Y_1, \dots, Y_n)$ glasi analogno kao za slučaj $n = 1$.

Zadatak 7.9 (**Uređajne statistike**). Medijan brojeva $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ je broj m koji je jednak nekom x_i za koji postoji n indeksa j takvih da je $x_j \leqslant m$ i n indeksa k takvih da je $x_k \geqslant m$. Na primjer, ako je $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n+1}$, tada je medijan $m = x_{n+1}$.

Neka su $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ njd slučajne varijable s $\mathrm{U}(0,1)$ razdiobom. Želimo odrediti funkciju gustoće njihovog medijana M.

(a) Možete pretpostaviti da je M neprekidna te da vrijedi $F_M'(x) = f_M(x)$ za sve $x \in (0,1)$. Zaključite da za sve $x \in (0,1)$ vrijedi

$$f_M(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(M \in (x-\epsilon, x+\epsilon))}{2\epsilon} .$$

(b) Ako je za $x \in (0,1)$ te $\epsilon > 0$ dovoljno mali,

$$\begin{aligned} A_{x,\epsilon} &:= \cup_{i \neq j} \{X_i, X_j \in (x-\epsilon, x+\epsilon)\} \\ &= \{\text{postoje barem dva } X_i\text{-a u } (x-\epsilon, x+\epsilon)\} , \end{aligned}$$

pokažite da je

$$\mathbb{P}(A_{x,\epsilon}) \leqslant \binom{n}{2} \epsilon^2 .$$

Zaključite da je

$$f_M(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(M \in (x-\epsilon, x+\epsilon), A_{x,\epsilon}^c)}{2\epsilon} .$$

(c) Pokažite da M ima $\mathrm{Beta}(n+1, n+1)$ razdiobu.

Rješenja zadataka: **Zad. 7.1** (a) $c = 1$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{7}{6}$, (d) $f_X(x) = \frac{1}{2} + x$, $x \in (0,1)$, te $Y \sim X$, zavisne su, (e) $f_{Y|X=x}(y) = \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}$, $x \in (0,1)$.**Zad. 7.2** (a) $f_Y(y) = \log\left(\frac{1}{y}\right)$, $y \in (0,1)$, (b) $f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{x\log(1/y)}$, $x \in (y,1)$; **Zad. 7.6** (b) $\frac{1}{n!}$; **Zad. 7.7** (b1) $\mathrm{Unif}(\{0,1,\ldots,n\})$, (b2) $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$; **Zad. 7.8** (a) $(\Lambda \mid Y = y) \sim \Gamma(\alpha + y, \beta + 1)$, $\mathbb{E}[\Lambda \mid Y = y] \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$ akko $y \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$, (b) $X \sim \mathrm{NB}(\alpha, \frac{\beta}{\beta+1})$, (c) $(\Lambda \mid Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) \sim \Gamma(\alpha + n\overline{y}_n, \beta + n)$, gdje je $\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, a $\mathbb{E}[\Lambda \mid Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n] \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$ akko $\overline{y}_n \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$.