POGLAVLJE 8

Nejednakosti i granični teoremi

ZADATAK 8.1. (a) Neka je X proizvoljna slučajna varijabla. Pokažite da za sve $a \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ vrijedi *Chernoffova* ograda:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = \frac{M_X(t)}{e^{ta}}\,.$$

(b) Neka je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$; odredite ograde na vjerojatnost $\mathbb{P}(|Z| \geqslant 3)$ koje daju Markovljeva, Čebiševljeva i Chernoffova nejednakost (uz optimalni t), te ih usporedite sa stvarnom vrijednosti te vjerojatnosti.

Uputa: Za Chernoffa iskoristite da je zbog simetrije $\mathbb{P}(|Z| > 3) = 2\mathbb{P}(Z > 3)$ (općenito imamo $\leqslant$), te je tipično dobra ideja izraz dobiven iz Chernoffove nejednakosti logaritmirati prije minimiziranja (pogotovo u (c) dijelu).

(c) Provedite postupak iz dijela (b) za vjerojatnost $\mathbb{P}(X \geqslant 75)$, gdje je $X \sim \mathrm{B}(100, \frac{1}{2})$. *Napomena:* Stvarna vrijednost je $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \approx 2.8 \cdot 10^{-7}$.

ZADATAK 8.2. Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ i varijancom $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) < \infty$, koristeći Čebiševljevu nejednakost odredite vrijednost $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je sigurno $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| < 2\sigma) \geqslant 0.99$ za sve $n \geqslant n_0$.

ZADATAK 8.3. Neka je $X, X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih varijabli definiran na istom vjerojatnosnom prostoru takav da za neki $p \geqslant 1$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[|X_n - X|^p\Big] = 0$ (kažemo da niz $(X_n)_{n\geqslant 1}$ L_p-konvergira prema X). Pokažite da tada $(X_n)_{n\geqslant 1}$ konvergira i po vjerojatnosti prema X.

ZADATAK 8.4. Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ograničena neprekidna funkcija, te $I := \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Ako je $Y_1, Y_2, \ldots$ niz njd $\mathrm{Unif}(a,b)$ slučajnih varijabli, odredite funkciju h (ako postoji) tako da vrijedi

$$\widehat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(Y_i) \xrightarrow{\text{g.s.}} I\,, \quad \text{kada } n \to \infty\,.$$

(b) Nađite h u slučaju kada Y_i-evi imaju proizvoljnu gustoću g koja je pozitivna na (a,b).

Napomena: Gornje je glavna ideja tzv. *Monte Carlo integracije* – u praksi je cilj naći gustoću g za koju je $\mathrm{Var}(\widehat{I}_n)$ što manja.

ZADATAK 8.5. Ako su $X_1, X_2, \ldots$ n.j.d. slučajne varijable i $B \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan, ako postoji odredite g.s. limes niza $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in B\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

ZADATAK 8.6. (a) Pretpostavimo da vrijedi $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$ za slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti u otvorenom skupu $I \subseteq \mathbb{R}$, te da je $g : I \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\mathbb{P}(X \in$

$C_g) = 1$, gdje je C_g skup svih točaka $x \in I$ u kojima je g neprekidna (npr. to je uvijek zadovoljeno ako je g neprekidna na I). Pokažite da onda vrijedi i $g(X_n) \xrightarrow{\text{g.s.}} g(X)$.

Napomena: Ovaj rezultat naziva se *teorem o neprekidnom preslikavanju*, te zapravo vrijedi i ako umjesto konvergencije g.s. imamo konvergenciju po vjerojatnosti ili po distribuciji.

(b) Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. slučajne varijable s distribucijom $X_i \sim \text{Unif}(-1,1)$, te neka je $X^{(n)} := (X_1, \dots, X_n) \in [-1,1]^n$, $n \geqslant 1$. Ako je $|x| := (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ euklidska norma točke $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, odredite (ako postoji) g.s. limes niza $\frac{|X^{(n)}|}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$.

Napomena: Slučajni vektor $X^{(n)}$ ima (neprekidnu) uniformnu razdiobu na hiperkocki $[-1,1]^n$, tj. vrijedi $\mathbb{P}(X^{(n)} \in A) = \lambda(A)/2^n$, za $A \subseteq \mathbb{R}^n$, gdje je $\lambda(A)$ ”volumen” skupa A (dakle, $\lambda([-1,1]^n) = 2^n$).

Zadatak 8.7. Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koristeći aproksimaciju dobivenu iz CGT-a, odredite najmanji broj prolaznika koji treba proći ulicom da bi prosjak skupio barem 150 novčića s vjerojatnošću od barem 0.95? *Uputa:* Vrijedi $\Phi(1.65) \approx 0.95$.

Zadatak 8.8. Na ispitu je 40 zadataka i za svaki su ponuđena četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen gubi se 5 bodova. Koristeći CGT aproksimirajte vjerojatnost da student koji slučajnim odabirom bira odgovore ostvari barem 120 bodova? *Uputa:* $\Phi(2.19) \approx 0.9857$.

Zadatak 8.9. (a) Ako X_n ima Poissonovu razdiobu s parametrom n, za $n \geqslant 1$, pokažite da X_n za velike n približno ima normalnu razdiobu s očekivanjem n i standardnom devijacijom $\sqrt{n}$.

(b) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\,.$$

Zadatak 8.10. Svaki dan, vrijednost dionice raste 70% ili pada 50%, i to s jednakim vjerojatnostima te neovisno o prethodnim danima. Neka je Y_n cijena dionice nakon n dana, pri čemu je $Y_0 := 100$.

(a) Pokažite da za $a_n := \mathbb{E}[\log(Y_n)]$ i $b_n^2 := \text{Var}(\log(Y_n))$, $n \geqslant 1$, vrijedi da $\log(Y_n)$ za velike n približno ima $\text{N}(a_n, b_n^2)$ razdiobu, tj. da

$$\frac{\log(Y_n) - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z \sim \text{N}(0,1)\,.$$

Odredite a_n i b_n.

(b) Odredite $\mathbb{E}[Y_n]$ za sve $n \geqslant 1$ te odredite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]$.

(c) Pokažite da $Y_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$ kada $n \to \infty$. *Uputa:* Napišite Y_n kao funkciju od U_n/n gdje je $U_n \sim \text{B}(n, \frac{1}{2})$.

Zadatak 8.11 (*ne ispituje se). (a) (**Slutskyjev teorem**) Pretpostavimo da su slučajne varijable $X, X_1, X_2, \dots$ i $Y, Y_1, Y_2, \dots$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, te da vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{d} Y$, kada $n \to \infty$. Ako je $Y = c \in \mathbb{R}$ konstantna, pokažite da onda $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$, kada $n \to \infty$.

(b) Pokažite da ako Y nije konstantna slučajna varijabla, tvrdnja iz (a) dijela ne mora vrijediti.

Rješenja zadataka: **Zad. 8.1** (b) ≈ 0.27, 0.11, 0.022, (c) $\approx 0.66, 0.04, 2.1 \cdot 10^{-6}$; **Zad. 8.2** 25; **Zad. 8.4** (a) $h(y) = (b-a) \cdot f(y)$, (b) $h(y) = f(y)/g(y) \cdot 1_{\{y \in (a,b)\}}$; **Zad. 8.5** $\mathbb{P}(X_1 \in B)$; **Zad. 8.6** (b) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; **Zad. 8.7** 3421; **Zad. 8.8** 0.0143; **Zad. 8.9** (b) $\frac{1}{2}$; **Zad. 8.10**(a) $a_n \approx -0.081n$, $b_n \approx 0.61\sqrt{n}$, (b) $100 \cdot (1.1)^n$, $+\infty$.