JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.
- Da bi se dobili bodovi, sva svoja rješenja potrebno je obrazložiti.

Zadatak 1. (*12 bodova*)

(a) (*4 boda*) Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(t) = \frac{3}{4}(1-t^2)\,,\ t \in [-1,1]\,,$$

te $f(t) = 0$, za $t \notin [-1,1]$. Odredite $\mathbb{P}(|X| < \frac{1}{2})$ i $\mathbb{E}[X]$.

(b) (*4 boda*) Neka je Y slučajna varijabla čija je funkcija distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ \frac{x}{4}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2\,. \end{cases}$$

Odredite $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < Y \le \frac{3}{2})$ i $\mathbb{P}(Y = 1)$.

(c) (*4 boda*) Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nenegativne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}[X_k] = k$, za sve $k \ge 1$, te N Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$ nezavisna od $X_1, X_2, \ldots$. Ako je $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \ge 1$, uz $S_0 := 0$, odredite $\mathbb{E}[S_N]$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

Zadatak 2. (*13 bodova*)

(a) (*3 boda*) Za slučajnu varijablu $Y \sim G_0(p)$, izvedite njenu funkciju izvodnicu vjerojatnosti.

(b) (*4 boda*) U nekom gradu, tijekom bilo kojeg dana, s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$ pada kiša te nezavisno od toga s vjerojatnošću $\frac{1}{5}$ puše vjetar. Također, vremenske prilike različitih dana su nezavisne. Neka je X broj dana od početka promatranja u kojima je puhao vjetar prije nego što je prvi put pala kiša. Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X. Koja je njena distribucija?

(c) Kupci u neku trgovinu pristižu u vremenskim razmacima čija su trajanja u satima nezavisne $\text{Exp}(4)$ slučajne varijable. Za $n \geq 0$, neka je T_n vrijeme dolaska n-tog kupca, pri čemu uzimamo $T_0 = 0$.

(c1) (*3 boda*) Odredite funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable T_n.

(c2) (*3 boda*) Dokažite da je vjerojatnost da će tijekom prvih 20 sati trgovinu posjetiti najviše 40 kupaca najviše $(\frac{2}{e})^{40}$.

Uputa. Primijenite Markovljevu nejednakost na slučajnu varijablu $e^{tT_{40}}$ za pogodno odabrani t.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a1) (*2 boda*) Precizno definirajte pojam apsolutno neprekidnog dvodimenzionalnog slučajnog vektora.

(a2) (*3 boda*) Neka su X i Y nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable. Dokažite da je slučajni vektor (X, Y) apsolutno neprekidan.

(a3) (*3 boda*) Neka su $X \geq 0$ i $Y \geq 0$ nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable. Dokažite da tada vrijedi $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(b) (*4 boda*) Slučajan broj putnika X ulazi u vlak na početnoj stanici. Na prvoj stanici svaki od putnika, nezavisno od drugih putnika, s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$ izlazi iz vlaka. Neka je Y slučajan broj putnika koji je izašao iz vlaka. Ako X ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ, izračunajte koeficijent korelacije $\rho(X, Y)$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 30. siječnja 2026.

Zadatak 4. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Definirajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli.

(b) (*2 boda*) Precizno iskažite slabi zakon velikih brojeva.

(c) (*4 boda*) Dokažite slabi zakon velikih brojeva.

(d) (*5 bodova*) Marketinška agencija tvrdi da 10% kupaca koji kliknu na njihovu reklamu kupe proizvod. Ako je na reklamu za vaš proizvod kliknulo 400 ljudi procjenite vjerojatnost da ga je kupilo 7% ili manje.

Napomena: $\Phi(1.65) = 0.95, \Phi(1.85) = 0.97, \Phi(2) = 0.98, \Phi(2.2) = 0.99$