VEKTORSKI PROSTORI

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

1. Neka su V i W konačnodimenzionalni kompleksni vektorski prostori.

a) (4 boda) Definirajte nilpotentan linearan operator $N \in L(V)$. Iskažite teorem o Jordanovom rastavu operatora $A \in L(V)$. Dokažite da je jezgra nilpotentnog dijela u Jordanovom rastavu od A invarijantna s obzirom na njegov poluprosti dio.

b) (3 boda) Definirajte adjungirani operator A' pridružen linearnom operatoru $A \in L(V, W)$. Dokažite da A i A' imaju jednake rangove.

c) (3 boda) Neka je $V = V_1 \dot{+} \ldots \dot{+} V_s$ rastav prostora V na potprostore koji su invarijantni s obzirom na operator $A \in L(V)$. Neka je $\mu_A(x)$ minimalan polinom od A i neka je $\mu_{A_i}(x)$ minimalan polinom pripadnog induciranog operatora $A_i\colon V_i \to V_i$ za sve $i = 1, \ldots, s$. Dokažite da $\mu_A(x)$ dijeli produkt $\mu_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot \mu_{A_s}(x)$.

2. (5 bodova) Koristeći algoritam za odredivanje minimalnog polinoma, odredite minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zapišite A^{-1} kao polinom u A. Odredite $det(A + 2I)$.

3. (5 bodova) Operator $N \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matrični zapis

$$N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite mu Jordanovu formu i neku Jordanovu bazu.

4. (5 bodova) Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ i neka je $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$. Neka je $f \in W^0$ takav da je $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1$. Izračunajte $f(A)$.

5. (5 bodova) Napišite Jordanovu formu operatora A ako je poznato:

- $A \in L(\mathbb{C}^8)$, $k_A(\lambda) = (\lambda + 3)^3(\lambda - 2)^5$, $\mu_A(\lambda) = (\lambda + 3)^2(\lambda - 2)^3$, $r(A - 2I) = 5$.
- $A \in L(\mathbb{C}^{10})$, A je nilpotentan, $r(A^2) = 4$, $r(A^4) = 1$, Jordanova forma od A ima sve blokove različite.
- $A \in L(\mathbb{C}^6)$, $tr(A) = 0$, $det(A) = 2^8$, $card(\sigma(A)) = 2$, $k_A(\lambda) = (\lambda + 2)\mu_A(\lambda)$.

6. (5 bodova) Za koje sve $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji matrica $A \in M_{2005}(\mathbb{R})$ koja zadovoljava jednadžbu

$$5A^2 + (6\alpha - 2)A + (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)I = 0?$$

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite.
Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.