

VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij, 8. veljače 2021.

1. (a) (3 boda) Navedite tri karakterizacije unitarnog operatora na konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru V i dokažite da su one ekvivalentne.
(b) (4 boda) Iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora na konačno-dimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru.
(c) (3 boda) Neka je A normalan operator na konačno-dimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru V . Dokažite da za njega vrijedi

$$V = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A.$$

2. (5 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ operator dan u kanonskoj bazi matricom

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $e^{\sin(A) + \cos(A)}$.

3. (5 bodova) Neka je a nenegativan realan broj. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} a & -5\sqrt{a} \\ -5\sqrt{a} & 25 \end{bmatrix}$$

pozitivan. Odredite $\sqrt{A}$ za $a = 4$.

4. (5 bodova) Za fiksne vektore $v, w \in \mathbb{R}^2$ definiramo funkcional $f_{v,w}$ na prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa

$$f_{v,w}(A) = \langle Av \mid w \rangle, \quad A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Ako je $v = (1, 2)$ i $w = (3, 1)$, odredite $B \in M_2(\mathbb{R})$ takvu da vrijedi $f_{v,w}(A) = \langle A \mid B \rangle$ za sve $A \in M_2(\mathbb{R})$.

5. (5 bodova) Neka je V kompleksan konačno-dimenzionalan vektorski prostor i $\tau : L(V) \rightarrow \mathbb{C}$ linearan funkcional takav da je $\tau(P) = r(P)$ za svaki projektor P (pri čemu je $r(P)$ oznaka za rang operatora P). Dokažite da je $\tau(AB) = \tau(BA)$ za sve $A, B \in L(V)$.
(**Uputa:** Usporedite τ s funkcionalom traga...)

6. (5 bodova) Neka je V kompleksan k.d.v.p. i $A \in L(V)$ takav da komutira sa svim unitarnim operatorima. Dokažite da je $A = \lambda I$, za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.
(**Uputa:** Pokažite da ne postoji $0 \neq W < V$ takav da je $UW \subset W$ za svaki unitaran operator U . Što sad možete zaključiti o svojstvenim potprostorima od A ?)