VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij, 8. veljače 2022.

1. (i) **(3 boda)** Definirajte unitarne operatore i dokažite da su sve svojstvene vrijednosti unitarnog operatora po apsolutnoj vrijednost jednaki 1.

(ii) **(4 boda)** Definirajte pozitivne hermitske operatore. Iskažite i dokažite teorem o drugom korijenu iz pozitivnog hermitskog operatora. (Uputa: dovoljno je dokazati egzistenciju drugog korijena).

(iii) **(3 boda)** Dokažite da je operator A na konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru V normalan ako i samo ako vrijedi $\|Ax\| = \|A^*x\|, \quad \forall x \in V$.

2. **(5 bodova)** Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, odredite

$$\sin^4(A) + 2\sin^2(A)\cos^2(A) + \cos^4(A).$$

3. **(5 bodova)** Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ u kanonskoj bazi ima matricu $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Je li operator A unitaran? Odredite A^{-1}.

4. **(5 bodova)** Na unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in \mathcal{P}_2$$

zadan je linearni funkcional f formulom

$$f(p) := \int_0^1 p(x^2)dx - \frac{1}{5}p''(0), \quad p \in \mathcal{P}_2.$$

Nađite polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $f(p) = \langle p, q \rangle$ za sve $p \in \mathcal{P}_2$.

5. **(5 bodova)** Neka je H potprostor u $\mathbb{C}^4$ razapet vektorima $(1,0,0,-1), (0,1,0,-1)$ i $(0,0,1,-1)$. Odredite najbolju aproksimaciju vektora $(0,1,1,0)$ u H.

6. **(5 bodova)** Neka je V kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor i neka je $A \in L(V)$ normalni operator.

(a) Ako je $\{3,4\} \subseteq \sigma(A)$, dokažite da postoji vektor $v \in V$ takav da je $||v|| = \sqrt{2}$ i $||Av|| = 5$. (UPUTA: Iskoristite Pitagorin poučak.)

(b) Ako je $\sigma(A) = \{3,4\}$, dokažite da je $A^2 - 7A + 12I = 0$.