VEKTORSKI PROSTORI

Ponovljeni (bolesnički) 1. kolokvij - 15. prosinca 2022.

1. (a) (3 boda) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te $A \in L(V)$. Definirajte minimalni polinom μ_A operatora A. Dokažite: Ako je A regularan, tada je $\mu_A(0) \neq 0$.

(b) (3 boda) Definirajte elementarnu Jordanovu klijetku J_n reda n. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije $\dim V = n$, te $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa $\text{ind}N = n$. Dokažite da postoji baza e za V takva da je $N(e) = J_n$.

(c) (4 boda) Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, te $A \in L(V)$. Definirajte korijenske potprostore operatora A. Dokažite da se svaki vektor iz V može prikazati kao suma vektora iz korijenskih potprostora (ne morate dokazivati jedinstvenost prikaza).

2. (5 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^3$ ima u nekoj bazi prostora $\mathbb{C}^3$ matrični prikaz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam za traženje minimalnog polinoma, odredite minimalni polinom operatora A.

3. (5 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matrični zapis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odredite mu Jordanovu formu i neku Jordanovu bazu.

4. (5 bodova) Neka je $W \leq \mathbb{R}^4$ linearna ljuska skupa $\{(2, -1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$. Napišite W kao skup rješenja homogenog sustava jednadžbi.

5. (5 bodova) Napišite Jordanovu formu operatora A ako je poznato:

- $A \in L(\mathbb{C}^9)$, $k_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 2)\mu_A(\lambda)$, $\text{card}(\sigma(A)) = 2$, $\text{tr}(A) = -10$.
- $A \in L(\mathbb{C}^{10})$, $r(A^5) = 0$, $d(A^3) + d(A^4) = 16$.
- $A \in L(\mathbb{C}^9)$, $k_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^8$, $\deg(\mu_A(\lambda)) = 6$, dimenzije svih blokova su različite.

6. (5 bodova) Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa $n = \dim V$. Dokažite: ako za $B \in L(V)$ vrijedi $\det B = 0$ i $BN = NB$, onda je $B^n = 0$.

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite i/ili dokažite.
Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.