2.1. Nezavisnost

Definicija 2.11

(i) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **nezavisni** ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,. \tag{2.9}$$

(ii) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **uvjetno nezavisni uz dani** $C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi

$$\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B \mid C)}_{\mathbb{P}_C(A \cap B)} = \underbrace{\mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)}_{\mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)}\,, \tag{2.10}$$

to jest ako su nezavisni s obzirom na $\mathbb{P}_C$!

Napomena 2.12

(i) Ako je $\mathbb{P}(B) > 0$ i $A \in \mathcal{F}$ proizvoljan, (2.9) je ekvivalentno s

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)\,, \tag{2.11}$$

što daje intuitivniju definiciju nezavisnosti.

(ii) Ako je $\mathbb{P}(B) = 0$ ili 1, A i B su nezavisni za svaki $A \in \mathcal{F}$.

(iii) Ako je $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ (tj. $\mathbb{P}_C(B) > 0$) i $A \in \mathcal{F}$ proizvoljan, (2.10) [tj. nezavisnost A i B uz dano C] je ekvivalentno s

$$\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid C)\,. \tag{2.12}$$

(iv) Ako je $\mathbb{P}(B \mid C) = 0$ ili 1, (2.10) vrijedi **za svaki** $A \in \mathcal{F}$.

Dokaz za DZ – (iii) i (iv) slijede direktno kada se (i) i (ii) primijene na vjerojatnost $\mathbb{P}_C$.

Primjer 2.13

Bacamo dvije kocke te neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{na prvoj kocki } 3\}, \\ B &= \{\text{na drugoj kocki } 4\}, \\ C &= \{\text{zbroj je } 7\}. \end{aligned}$$

Tada,

(a) A i B su nezavisni [inače očito imamo problem u definiciji];

(b) A i C su nezavisni, B i C su nezavisni [intuicija?];

(c) uz dano C, A i B nisu nezavisni (tj. kažemo da su zavisni).

$\rightsquigarrow$ rješenje na ploči

Primjer 2.14

U prvoj kutiji nalazi se 9 bijelih i 1 crna, a u drugoj 3 bijele i 7 crnih kuglica. Slučajno izaberemo jednu kutiju te iz nje izvučemo 2 kuglice s vraćanjem. Neka su

$$B_i = \{i\text{-ta izvučena kuglica je bijela}\}, \ i = 1, 2,$$
$$A = \{\text{u početku smo izabrali prvu kutiju}\}.$$

Tada vrijedi

(a) B_1 i B_2 su uvjetno nezavisni uz dano A.

(b) B_1 i B_2 su zavisni.

$\leadsto$ rješenje na ploči

Napomena

Općenito, nezavisnost ne povlači uvjetnu nezavisnost, i obratno.

Lema 2.15. Ako $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni, onda su nezavisni i parovi događaja:

$$A^c \text{ i } B\,,\ A \text{ i } B^c\,,\ A^c \text{ i } B^c\,.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = [\text{nezavisnost}] = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^c)\,,\end{aligned}$$

ili

$$\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B) = [\text{nezavisnost}] = 1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c)\,,$$

ako je $\mathbb{P}(B) > 0$ (inače su A i B trivijalno nezavisni). Ostale tvrdnje se dokazuju analogno. $\square$

2.2.1. Nezavisnost familije događaja

Definicija 2.16

Familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ pri čemu I može biti proizvoljan skup, je

(i) **nezavisna** ako vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mathbb{P}(A_i)\,,$$

za svaki konačan i neprazan podskup $F \subseteq I$.

(ii) **uvjetno nezavisna** uz dano $C \in \mathcal{F}$ ($\mathbb{P}(C) > 0$), ako je nezavisna [u smislu definicije (i)] s obzirom na $\mathbb{P}_C$.

(iii) u **parovima nezavisna** ako su A_i i A_j nezavisni za sve $i, j \in I$, $i \neq j$.

Na primjer, $A, B, C \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako vrijedi

1. $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, te još
2. $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. $\rightsquigarrow$ Zašto ne samo 2?

Napomena 2.17

Ako su $(A_i)_{i\in I}$ nezavisni, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F_2} A_i \;\middle|\; \bigcap_{j\in F_1} A_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F_2} A_i\right) = \prod_{i\in F_2} \mathbb{P}(A_i)\,, \tag{2.13}$$

za sve konačne, neprazne i disjunktne podskupove $F_1, F_2 \subseteq I$ (pri čemu pretpostavljamo da je $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F_1} A_i\right) > 0$).

Dokaz za DZ

Primjer 2.18

Bacamo dvije kocke te neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{na prvoj kocki } 3\}\,, \\ B &= \{\text{na drugoj kocki } 4\}\,, \\ C &= \{\text{zbroj je } 7\}\,. \end{aligned}$$

Pokazali smo da su A, B, C u parovima nezavisni, ali tvrdimo da nisu nezavisni. To slijedi iz

$$\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = 1 \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\,,$$

što je kontradikcija s (2.13), ili iz

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{(3,4)\}) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

[Dakle, u parovima nezavisnost općenito ne povlači nezavisnost!]

Napomena 2.19

Ako je familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ nezavisna, tada je nezavisna i svaka familija događaja $(B_i)_{i\in I}$ pri čemu je

$$B_i = A_i \text{ ili } A_i^c, \, \forall i \in I.$$

(bez dokaza)

Primjer 2.20

Igrači A i B igraju niz nezavisnih igara, pri čemu svaka igra završava

pobjedom igrača A s vjerojatnošću p,

pobjedom igrača B s vjerojatnošću q,

neriješeno s vjerojatnošću r,

za neke $0 < p, q, r < 1$ takve da vrijedi $p + q + r = 1$.

Odredite vjerojatnost događaja

$$A := \{\text{A je prvi došao do pobjede}\}\,.$$

$\leadsto$ rješenje na ploči