

5.3. Funkcije neprekidne slučajne varijable

Poruka ovog potpoglavlja: ako je X neprekidna slučajna varijabla, te $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija,

- $g(X)$ ne mora nužno biti neprekidna;
- čak i kada je $g(X)$ neprekidna, i g bijekcija, tipično

$$f_{g(X)}(g(x)) \neq f_X(x).$$

kao što je to bilo u diskretnom slučaju:

$$\mathbb{P}(g(X) = g(x)) = \mathbb{P}(X = x).$$

Primjer 5.13 (Simuliranje diskretne razdiobe)

- Neka je $U \sim \text{Unif}(0, 1)$, $p \in [0, 1]$, te

$$X := \begin{cases} 1, & \text{ako } U \in [1-p, 1] \\ 0, & \text{ako } U \in [0, p) \end{cases} = \mathbb{1}_{\{U \geq 1-p\}}.$$

- X očito poprima vrijednosti u $\{0, 1\}$ te je

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(U \in [1-p, 1]) = \frac{p}{1} = p.$$

Dakle, $X \sim B(p)$.

- Kako iz $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ simulirati

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} ?$$

Primjer 5.14 ($g(\text{Unif})$ ne mora biti Unif)

- Neka je $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$ te $Y := X^2$.
- Imamo $Y \in (0, 1)$. Odredimo $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$, $y \in \mathbb{R}$, čime ćemo odrediti **razdiobu** od Y .
- Očito je $F_Y(y) = 0$ za $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$ za $y \geq 1$.
- Za $y \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]) = [X \sim \text{Unif}(-1, 1)] \\ &= \frac{\text{duljina}([-\sqrt{y}, \sqrt{y}])}{\text{duljina}([-1, 1])} = \frac{2\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

[nacrtaj F_Y].

Primjer 5.14 ($g(\text{Unif})$ ne mora biti Unif)

- Je li Y neprekidna slučajna varijabla? DA!
- To slijedi jer za

$$f(t) := \begin{cases} F'_Y(t), & t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ 0, & t \in \{0, 1\} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}, & t \in (0, 1) \\ 0, & t \notin (0, 1) \end{cases}$$

vrijedi $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt$, za sve $y \in \mathbb{R}$ [provjerite to!].

- Dakle, Y je neprekidna s gustoćom f . Specijalno, Y nema $\text{Unif}(0, 1)$ razdiobu, nego veću masu stavlja na vrijednosti bliže 0.

Nap. 5.15 (Kako prepoznati FD neprekidne razdiobe?)

- (a) Čak i ako je $F = F_X$ diferencijabilna **osim u konačno mnogo točaka**, X **ne mora** nužno biti neprekidna slučajna varijabla. Npr. za $X \sim B(1/2)$ [nacrtaj F_X].
- (b) Ipak, ako je (i) $F = F_X$ **neprekidna na $\mathbb{R}$** , (ii) diferencijabilna osim u najviše konačno mnogo točaka $S \subseteq \mathbb{R}$, te (iii) F' neprekidna na $\mathbb{R} \setminus S$ [kao u prethodnom primjeru]¹, tada je slučajna varijabla X neprekidna, a za njenu gustoću možemo uzeti

$$f(t) := \begin{cases} F'(t), & t \notin S \\ 0, & t \in S. \end{cases}$$

*Dokaz**. Pogledati sami (Newton-Leibniz).

¹Napomenimo ipak da rezultat vrijedi i bez pretpostavke (iii).

Zadatak (zatvorenost Unif razdiobe na linearne transformacije)

Ako je $U \sim \text{Unif}(0, 1)$, pokažite da za sve $a < b$, slučajna varijabla

$$X := (b - a)U + a$$

ima $\text{Unif}(a, b)$ razdiobu (očito je $X \in (a, b)$).

Prop. 5.16 (Simuliranje varijabli iz $U \sim \text{Unif}(0, 1)$)

Neka je F unaprijed zadana funkcija distribucije, te želimo simulirati slučajnu varijablu X t.d. je točno $F_X = F$.

Pretpostavimo da F zadovoljava sljedeće uvjete: za neke $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, vrijedi da je F neprekidna i strogo rastuća funkcija na (a, b) , te je $F(a) = 0, F(b) = 1$ – specijalno, F je bijekcija sa (a, b) u $(0, 1)$, tj. postoji $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ [nacrtati primjer!].²

Tada za $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ i $X := F^{-1}(U)$ ($\in (a, b)$), vrijedi $F_X = F$.

Napomena.

- Gornje pretpostavke isključuje npr. diskretne, ali i mnoge druge razdiobe, tj. funkcije distribucije F .
- Ipak, gornji rezultat se lako može poopćiti na proizvoljnu funkciju distribucije F tako da se inverz F^{-1} zamijeni s tzv. **generaliziranim inverzom** $F^{\leftarrow}$.
- Dakle, u teoriji, ako znamo simulirati $\text{Unif}(0, 1)$ razdiobu, možemo simulirati **svaku** F !

²Uvjet $F(a) = 0, F(b) = 1$ povlači da je $\mathbb{P}(X \in (a, b)) = 1$. 

Prop. 5.16 (Dokaz)

- za $x \notin (a, b)$, budući da je $F^{-1}(u) \in (a, b)$ za sve $u \in (0, 1)$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & x \geq b \end{cases} = F(x).$$

- za $x \in (a, b)$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = [F \text{ strogo rastuća}] \\ &= \mathbb{P}(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) \\ &= [F(x) \in (0, 1), U \sim \text{Unif}(0, 1)] = \frac{F(x)}{1} = F(x). \end{aligned}$$

Napomena (nekad $F_X(X) \sim \text{Unif}(0, 1)$)

- ako $F = F_X$ zadovoljava uvjete prethodne propozicije, slučajna varijabla $Y := F(X)$ ima $\text{Unif}(0, 1)$ razdiobu (vježbe)
- Ovaj rezultat vrijedi i općenitije – dovoljno je da je F **samo neprekidna** (bez dokaza), ali bez tog uvjeta rezultat ne mora vrijedi.
- Za takve $F = F_X$, i proizvoljnu Y , prethodna dva rezultata nam govore kako naći g t.d. $g(X) \sim Y$? Ovo je korisno u statistici.

Primjer 5.17 (simuliranje $\text{Exp}(\lambda)$ razdiobe)

- Neka je $F = F_Z$ za $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ – dakle $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ za $x \geq 0$ i $F(x) = 0$ za $x < 0$ [slika]
- F zadovoljava uvjete prethodne propozicije uz $a = 0, b = +\infty$, te je [provjerite!]

$$F^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{\lambda}, \quad u \in (0, 1).$$

- Dakle, ako je $U \sim \text{Unif}(0, 1)$,

$$-\frac{\log(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda).$$

- budući da je i $1 - U \sim \text{Unif}(0, 1)$ (DZ), imamo i jednostavniju verziju

$$-\frac{\log(U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Propozicija 5.18 (zamjena varijabli)

Pretpostavimo da je

- X neprekidna slučajna varijabla s vrijednostima u otvorenom intervalu I , te
- $g : I \rightarrow (m, M)$ **strogo monotona i neprekidna bijekcija** takva da postoji $(g^{-1})'(y)$, za sve $y \in (m, M)$.

Tada je $Y := g(X)$ neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)|, \quad y \in (m, M) \quad (5.12)$$

te $f_Y(y) = 0$ za $y \notin (m, M)$.

Propozicija 5.18 (dokaz)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)| \quad (5.12)$$

- izgleda komplicirano, ali nije: npr. ako je g strogo rastuća,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(g(X) \leq y) = [\text{i } g^{-1} \text{ strogo rastuća}] \\ &= \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)), \quad y \in (m, M). \end{aligned}$$

- (5.12) slijedi jer $f_Y(y) = F'_Y(y)$ + derivacija kompozicije
- ima još par tehničkih detalja – pogledati za DZ.
- Ipak, sam rezultat, tj. iskaz, nije toliko bitan budući da je u praksi tipično lakše svaki put ponovno provesti dokaz, pogotovo jer često uvjeti propozicije nisu zadovoljeni.

Propozicija 5.18 (Koja je onda poanta?)

- kada je X **diskretna** i g bijekcija, tada za sve y , vjerojatnosne funkcije mase zadovoljavaju

$$f_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(g(X) = y) = \mathbb{P}(X = g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) .$$

- S druge strane, kada je X **neprekidna**, općenito za gustoće imamo

$$f_{g(X)}(y) \neq f_X(g^{-1}(y))$$

osim ako je $(g^{-1})'(y) = 1$.

- Dakle, vrijedit će $f_{g(X)}(y) = f_X(g^{-1}(y))$ za sve $y \in (m, M)$ akko je $g^{-1}(y) = y + c$, tj. akko je $g(x) = x - c$, za neki $c \in \mathbb{R}$ (tj. ako je g **translacija**).