Vjerojatnost

Zadaci za vježbu

Adrian Beker, Hrvoje Planinić, Ivana Valentić

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

E-mail adresa: `adrian.beker@math.hr`, `planinic@math.hr`, `ivana.valentic@math.hr`

Sadržaj

POGLAVLJE 1

Vjerojatnost

ZADATAK 1.1. Slučajni pokus sastoji se od bacanja dvije igraće kocke. Odredite prostor elementarnih događaja Ω. Ako je

$$E = \{\text{zbroj brojeva na kockama je neparan}\},$$
$$F = \{\text{barem jedna kocka je pala na } 1\},$$
$$G = \{\text{zbroj brojeva na kockama je } 5\},$$

prikažite pomoću elementarnih događaja sljedeće događaje:

$$F,\ G,\ E \cap F,\ F \cap G \text{ i } E \cap F \cap G.$$

ZADATAK 1.2. Slučajni pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića sve dok ne padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja Ω i pomoću njih prikažite sljedeće događaje:

(i) $A = \{\text{novčić je bačen neparno mnogo puta}\}$,
(ii) $B = \{\text{glava je pala barem pet puta zaredom}\}$.

ZADATAK 1.3. Neka su A, B i C događaji vezani uz neki slučajni pokus. Prikažite pomoću A, B i C sljedeće događaje:

(i) dogodio se barem jedan gornji događaj,
(ii) dogodio se točno jedan gornji događaj,
(iii) dogodila su se točno dva gornja događaja,
(iv) nisu se dogodila više od dva gornja događaja.

ZADATAK 1.4. Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Odredite koje od sljedećih familija podskupova skupa Ω su σ-algebre na Ω, a one koje nisu nadopunite do najmanje σ-algebre koja sadrži elemente te familije.

(i) $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$,
(ii) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

ZADATAK 1.5. Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i $B \subseteq \Omega$. Jesu li tada

(i)
$$\mathcal{G} = \{C \subseteq B : C \in \mathcal{F}\}$$

(ii)
$$\mathcal{H} = \{C \subseteq B : \text{ postoji } A \in \mathcal{F} \text{ takav da je } C = A \cap B\}$$

σ-algebre na B?

ZADATAK 1.6. Ako su A i B događaji, dokažite da vrijedi $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \triangle B)$.

ZADATAK 1.7. Neka su A i B događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da je $\frac{1}{12} \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \frac{1}{3}$ i navedite primjere koji pokazuju da su oba rubna slučaja moguća. Koje ograde vrijede za $\mathbb{P}(A \cup B)$?

ZADATAK 1.8. Simetrični novčić baca se 4 puta. Izračunajte vjerojatnost da

(i) padnu barem tri pisma,
(ii) padnu točno tri pisma,
(iii) padnu barem tri pisma zaredom,
(iv) padnu točno tri pisma zaredom.

ZADATAK 1.9. Bacamo n simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da produkt dobivenih brojeva

(i) bude djeljiv s 5,
(ii) ima zadnju znamenku 5,
(iii) ima zadnju znamenku 0.

ZADATAK 1.10 (Problem of points). Dva igrača A i B igraju niz igara dok netko ne skupi 6 pobjeda. Igre su nezavisne, a u svakoj igri obojica imaju jednaku vjerojatnost pobjede. Nakon 8 igara, igrač A ima 5, a igrač B 3 pobjede. Zanima nas vjerojatnost da će igrač B ipak pobijediti.

Objasnite zašto sljedeće rješenje nije točno: Svi mogući ishodi su $\Omega = \{A_1, B_1A_2, B_1B_2A_3, B_1B_2B_3\}$ pri čemu npr. A_2 predstavlja da je prvi igrač pobijedio u 2. sljedećoj igri (tj. 10. ukupno). Dakle, $\mathbb{P}(\{\text{B prvi do pobjede}\}) = \frac{|\{B_1B_2B_3\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.

ZADATAK 1.11. Iz skupa $\{1, \ldots, 100\}$ nasumce su odabrana dva ne nužno različita broja, m i n. Izračunajte vjerojatnost da je

(i) $m^n + n^m$ neparan broj,
(ii) $m^n \cdot n^m$ paran broj.

ZADATAK 1.12. Za Okrugli stol sjeda n vitezova, pri čemu Arthur ne želi sjediti kraj Mordreda ni kraj Lancelota. Ako sjedaju na slučajan način, kolika je vjerojatnost da Arthur ne sjedi ni kraj Mordreda ni kraj Lancelota?

ZADATAK 1.13. Pokažite da za događaje A, B, C vrijedi

$$\mathbb{P}(A^c \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Koliko ima prirodnih brojeva među $1, \ldots, 500$ koji nisu djeljivi sa 7, ali su djeljivi s 3 ili 5?

ZADATAK 1.14. Jednog radnog tjedna u nekom gradu 10 ljudi je pozvalo električara u svoje kuće radi popravka nekih električnih uređaja. Svaki čovjek je slučajno odabrao neki radni dan u tom tjednu i pozvao električara. Izračunajte vjerojatnost da postoji barem jedan radni dan u kojem nitko nije pozvao električara.

Zadatak 1.15. Teniski turnir igraju $m = 2^n$ igrača (dakle, ukupno n runda, pri čemu je zadnja runda finale), te pretpostavimo da u svakom meču, svaki od igrača ima jednaku vjerojatnost da pobijedi. Ako slučajno odaberemo dva igrača, odredite vjerojatnost da se susretnu

(i) u prvoj rundi;
(ii) u finalu;
(iii) u nekom trenutku.

Zadatak 1.16. Marija baci dva novčića, a Ivan jedan.

(i) Koja je vjerojatnost da Mariji padne više glava nego Ivanu?
(ii) Koji je odgovor na to pitanje ako Marija baci tri novčića, a Ivan dva?
(iii) Što mislite kolika je ta vjerojatnost ako Marija baci $n+1$ novčić, a Ivan njih n?
(iv) Možete li to dokazati promatranjem svih mogućnosti nakon što je Ivan bacio sve svoje novčiće, a Mariji je preostalo još jedno bacanje?

Zadatak 1.17. Da bi počeli igrati s čovječuljkom u igri *Čovječe ne ljuti se* morate prvo dobiti šesticu na kocki.

(i) Izračunajte vjerojatnost da u trećem pokušaju prvi puta dobijete šesticu.
(ii) Izračunajte vjerojatnost da vam treba više od tri pokušaja da prvi puta dobijete šesticu.
(iii) Nakon koliko bacanja bi vjerojatnost da ste dobili šesticu bila barem 0.95?

Zadatak 1.18. (i) Pokažite tzv. Bonferronijevu nejednakost

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

(ii) Svaku od m kuglica smo slučajno rasporedili u bilo koju od n kutija ($m \geqslant n$). Koristeći subaditivnost vjerojatnost te gornju nejednakost, ograničite s obje strane vjerojatnost događaja $E = \{\text{barem jedna kutija je ostala prazna}\}$. Intuitivno, zašto je ova aproksimacija bolja kada je $m \gg n$?

Zadatak 1.19. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz događaja takvih da je $\mathbb{P}(A_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Zadatak 1.20. Poznato je da se gotovo sigurno događa barem jedan od događaja $A_1, \dots, A_n$ te da se gotovo sigurno ne događa tri ili više tih događaja. Ako je $\mathbb{P}(A_i) = p$ za sve i te $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = q$ za sve $i \neq j$, pokažite da je $p \geqslant \frac{1}{n}$ te $q \leqslant \frac{2}{n}$.

Rješenja zadataka: **Zad. 1.8** (i) 5/16, (ii) 1/4, (iii) 3/16, (iv) 1/8; **Zad. 1.9** (i) $1-(5/6)^n$, (ii) $(3^n-2^n)/6^n$, (iii) $(6^n-5^n-3^n+2^n)/6^n$; **Zad. 1.10** 1/8; **Zad. 1.11** (i) 1/2, (ii) 3/4; **Zad. 1.12** $(n-3)(n-4)/((n-1)(n-2))$; **Zad. 1.14** $(5\cdot 4^{10} - 10\cdot 3^{10} + 10\cdot 2^{10} - 5)/5^{10}$; **Zad. 1.15** (i) $1/(2^n-1)$, (ii) $1/(2^{n-1}(2^n-1))$, (iii) $1/2^{n-1}$; **Zad. 1.16** Sva rješenja su 1/2; **Zad. 1.17** (i) $25/6^3$, (ii) $125/6^3$, (iii) $n \geqslant 17$; **Zad. 1.18** $n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - \binom{n}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^m \leqslant \mathbb{P}(E) \leqslant n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.

POGLAVLJE 2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Zadatak 2.1. Špil sadrži n karata označenih prirodnim brojevima od 1 do n. Karte se izvlače slučajnim redoslijedom, jedna po jedna. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n$ fiksan. Ako znamo da je k-tom izvlačenju izvučen dotad najveći broj, koja je vjerojatnost da je on n?

Zadatak 2.2. Bacamo 5 simetričnih novčića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovno one novčiće koji su u prvom bacanju pokazali glavu. Kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja ukupno (u oba bacanja) pasti barem 3 pisma?

Zadatak 2.3. Dva igrača pikada, A i B, naizmjence bacaju strelice dok netko ne pogodi u centar. Poznato je da su ishodi različitih bacanja nezavisni te da pri svakom bacanju A ima vjerojatnost p_A, dok B ima vjerojatnost p_B da pogodi u centar. Ako A kreće prvi, odredite vjerojatnost da će on prvi pogoditi u centar. *Uputa:* Uvjetujte na rezultat prvog bacanja.

Zadatak 2.4. Tri novčića C_1, C_2 i C_3 leže na stolu. Vjerojatnosti da na njima padne pismo su redom $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ i 1. Na slučajan način uzmemo jedan novčić, bacimo ga i uočimo da je palo pismo. Odredite vjerojatnosti da smo uzeli novčić C_i, $i = 1, 2, 3$.

Zadatak 2.5. Kutija sadrži n kuglica nepoznatih boja. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. Ako je bez vraćanja izvučena kuglica bijele boje, kolika je vjerojatnost da će i sljedeća izvučena kuglica biti bijele boje?

Zadatak 2.6. Bacamo slučajan broj N kocaka. Neka je A_i događaj da je $N = i$ te pretpostavimo da je $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-i}$ za sve $i \geqslant 1$. Neka je S zbroj dobivenih brojeva. Odredite vjerojatnost da je:

(i) $N = 2$ ako znamo da je $S = 4$;
(ii) $S = 4$ ako znamo da je N paran.

Zadatak 2.7. Imamo 5 novčića, od kojih dva na obje strane imaju pismo, jedan na obje strane ima glavu, a preostala dva su simetrična. Zatvorimo oči, odaberemo nasumičan novčić i bacimo ga.

(i) Koja je vjerojatnost da se na donjoj strani nalazi pismo?
(ii) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
(iii) Ponovo zatvorimo oči i bacimo novčić. Koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?

(iv) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?

(v) Uklonimo ovaj novčić, nasumično odaberemo neki drugi i bacimo ga. Koja je vjerojatnost da on pokazuje pismo?

Zadatak 2.8. (i) Pretpostavimo da k ljudi nezavisno jedan od drugog biraju po jednu od n različitih vrsta sladoleda ($k \leqslant n$). Odredite vjerojatnost postoji barem jedan par ljudi koji su izabrali istu vrstu te pokažite da je ova vjerojatnost odozdo ograničena s $1 - \exp\{-\frac{(k-1)k}{2n}\}$. *Uputa:* Iskoristite nejednakost $1 - x \leqslant e^{-x}$, $x \geqslant 0$.

(ii) Kolika je vjerojatnost da u grupi od k slučajno odabranih ljudi barem dvoje imaju rođendan na isti dan u godini? Pokažite da je ta vjerojatnost barem 0.5 ako je $k = 23$, te barem 0.998 ako je $k = 70$.

Zadatak 2.9. Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da su tada nezavisni i događaji A i B^c, A^c i B^c, A i $B \cup C$, $A \setminus B$ i C.

Zadatak 2.10. Simetričnu kocku bacamo n puta. Neka je $A_{i,j}$ događaj da kocka pri i-tom i j-tom bacanju pokazuje isti broj. Pokažite da su događaji $(A_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ u parovima nezavisni, ali da nisu nezavisni.

Zadatak 2.11. Novčić koji pokazuje pismo s vjerojatnošću $p \in (0,1)$ bačen je n puta. Neka je E događaj da je u prvom bacanju palo pismo, a F_k događaj da je palo ukupno točno k pisama. Fiksirajmo proizvoljne $n \geqslant 2$ te $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Odredite $\mathbb{P}(E \mid F_k)$ te ispitajte nezavisnost događaja E i F_k u ovisnosti o parametru $p \in (0,1)$.

Zadatak 2.12. Uzastopno bacamo novčić koji s vjerojatnošću $p \in (0,1)$ pokazuje pismo, a s vjerojatnošću $q := 1-p$ glavu. Za dane prirodne brojeve r i s, odredite vjerojatnost da se prije pojavi r uzastopnih pisama nego s uzastopnih glava. *Uputa:* Prvo uvjetujte na rezultat prvog bacanja. Ako je u prvom bacanju pala pismo, dodatno uvjetujte na to jesu li u sljedećih $r-1$ bacanja pala samo pisma ili ne.

Zadatak 2.13. Promatramo nezavisna bacanja novčića. Za $n \in \mathbb{N}$ neka događaj A_n označava da je u n-tom bacanju novčić pao na glavu.

(i) Objasnite riječima što predstavlja događaj $B = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c$.

(ii) Izrazite formulom sličnom onoj iz (i) dijela zadatka događaj C da je novčić beskonačno mnogo puta pao na glavu.

(iii) Koje su vjerojatnosti događaja B i C kada je $\mathbb{P}(A_n) = p$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neki $0 < p < 1$?

Zadatak 2.14. Igrači A,B,C bacaju kocku tim redoslijedom. Svaki igrač ispada iz igre čim prvi put dobije šesticu. Odredite vjerojatnost događaja

$$A_i = \{\text{A je ispao } i\text{-ti po redu}\}\,,\ i = 1, 2, 3\,.$$

Navedite koji prostor elementarnih događaj gledate. Očekujete li da vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1) > \mathbb{P}(A_2) > \mathbb{P}(A_3)\,?$$

ZADATAK 2.15. Bacamo simetričan novčić (beskonačno mnogo puta). Ako je s bilo koji niz slova P,G duljine $r \in \mathbb{N}$ (npr. za $r = 3$, $s =$ PPG), odredite vjerojatnost događaja

(a) $A = \{$niz s se pojavio barem jedan put$\}$;

(b) $B = \{$niz s se pojavio beskonačno mnogo puta$\}$.

Uputa: Gledajte **disjunktne** blokove od po r bacanja.

ZADATAK 2.16. Neka je $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ niz događaja. Događaj iz Borel-Cantellijevih lema često označavamo s

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k\,,$$

te slično

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

Pokažite da vrijedi

(i)
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

(ii)
$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

Rješenja zadataka: **Zad. 2.1** k/n; **Zad. 2.2** 459/512; **Zad. 2.3** $\frac{p_A}{p_A+p_B-p_Ap_B}$; **Zad. 2.4** 1/6, 1/3, 1/2; **Zad. 2.5** 2/3; **Zad. 2.6** (i) $\frac{12^2\cdot 3}{13^3}$, (ii) $\frac{433}{6912}$. **Zad. 2.7** (i) $\frac{3}{5}$, (ii) $\frac{2}{3}$, (iii) $\frac{5}{6}$, (iv) $\frac{4}{5}$, (v) $\frac{21}{40}$; **Zad. 2.8** $1-\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})$; **Zad. 2.11** k/n, nezavisni akko $p = k/n$; **Zad. 2.12** $\frac{p^{r-1}(1-q^s)}{p^{r-1}+q^{s-1}-p^{r-1}q^{s-1}}$; **Zad. 2.13**(iii) 0,1; **Zad. 2.14** $\frac{396}{1001}$, $\frac{300}{1001}$, $\frac{305}{1001}$; 2.15 1, 1.

POGLAVLJE 3

Diskretne slučajne varijable

Zadatak 3.1. Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2+c \end{pmatrix}.$$

(i) Odredite konstantu $c \in \mathbb{R}$.
(ii) Izračunajte $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

Zadatak 3.2. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu prirodnih brojeva i vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$ za $k \in \mathbb{N}$. Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

Zadatak 3.3. Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathbb{N}$ s distribucijom

$$\mathbb{P}(X = k) = ck^{-\alpha}\,,\ k = 1, 2, \ldots$$

za parametre $c, \alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Odredite moguće kombinacije parametara c i α.
(ii) Odredite za koje vrijednosti parametra α je $\mathbb{E}[X] < \infty$.

Zadatak 3.4. Bacimo n jednakih nesimetričnih novčića koji pokazuje glavu s vjerojatnošću p. Sve novčiće koji su pali na glavu bacimo još jednom. Odredite distribuciju ukupnog broja glava u drugom bacanju. Kako izgleda njena vjerojatnosna funkcija mase?

Zadatak 3.5. Kladite se na igru u kojoj je vjerojatnost dobitka $0 < p \leqslant 1/2$. Ako dobijete u igri, dobitak je jednak iznosu uloga (ako izgubite, izgubili ste ulog). Prva oklada je 1 kn; ako dobijete, prestajete igrati. Ako izgubite, kladite se za 2 kn, itd. Vaša n-ta oklada iznosi 2^{n-1} kn. Čim dobijete u nekoj igri odmah odustajete od daljnje igre.

(i) Pokažite da je Vaš ukupni dobitak 1 kn s vjerojatnošću 1.
(ii) Nađite očekivani iznos oklade kojom dobivate.

Nadalje, pretpostavite da je najveća dopuštena oklada jednaka 2^L kn, $L \in \mathbb{N}$.

(iii) Koliki je očekivani dobitak kada prestajete s igrom?

Zadatak 3.6. Bacamo niz nezavisnih nesimetričnih novčića pri čemu je

$$p_n := \mathbb{P}(\{\text{u } n\text{-tom bacanju palo pismo}\}) = \frac{1}{n+1}.$$

Ako T označava broj bacanja dok prvi put ne dobijete pismo, odredite $\mathbb{P}(T < \infty)$ i $\mathbb{E}[T]$.

Zadatak 3.7. Marko svaki dan kasni na nastavu s vjerojatnošću 0.2.

(i) Kolika je vjerojatnost da je u jednom tjednu (tj. u 5 radnih dana) zakasnio najviše jednom?
(ii) Za koji najveći broj dana u tjednu možemo biti barem 90% sigurni da je barem toliko puta došao na vrijeme?

Zadatak 3.8. Ako U ima diskretnu uniformnu razdiobu na $\{1, 2, \dots, n\}$, tj. $\mathbb{P}(U = i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, odredite $\mathbb{E}[U]$ i $\mathrm{Var}(U)$. (*Uputa:* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

Zadatak 3.9. U neko skladište dolazi 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta je 0.002. Neovisno o tome, neke vaze razbiju se i unutar skladišta, s vjerojatnošću 0.0015 (pritom je moguće da je neka vaza razbijena i u transportu i u skladištu). Koristeći zakon rijetkih događaja dajte procjenu vjerojatnosti da je ukupan broj razbijenih vaza veći od 3.

Zadatak 3.10. U grupi od n ljudi,

(a) Koliki je očekivani broj različith dana u godini (od 365 dana) u kojima barem jedna osoba ima rođendan?
(b) Koliki je očekivani broj parova ljudi koji imaju rođendan na isti dan.

Zadatak 3.11. Ako su $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji, dokažite formulu-uključivanja isključivanja koristeći indikatorske funkcije.

Zadatak 3.12. (a) Ako je X slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$. Pokažite da X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ (tj. $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$) akko za svaku funkciju $g : \{0, 1, \dots\} \to [0, \infty)$ vrijedi

$$\mathbb{E}[Xg(X)] = \lambda \mathbb{E}[g(X + 1)] \,.$$

Napomena: Ovaj identitet je baza tzv. *Stein-Chenove* metode za dokazivanje konvergencije prema Poissonovoj razdiobi, pri čemu se usput dobiju jako precizne ograde na brzinu konvergencije. Glavna ideja metode je u tome da slučajna varijabla X *približno* ima $\mathrm{P}(\lambda)$ razdiobu ako gornji identitet *približno* vrijedi za dovoljno veliku klasu funkcija g.

(b) Koristeći (a) dio, odredite $\mathbb{E}[X^3]$ za $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Zadatak 3.13. Simetrična kocka ima četiri strane obojane žutom bojom te dvije obojane plavom bojom. Odredite očekivani broj bacanja kocke do pojave obje boje.

Zadatak 3.14. (a) Neka $T \sim \mathrm{G}_0(p)$ za $p > 0$, tj. $\mathbb{P}(T = k) = q^k p$, $k \in \mathbb{N}_0$, za $q := 1 - p$. Pokažite da T ima *svojstvo zaboravljivosti*: za svaki $m \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T - m \geqslant k \mid T \geqslant m) = \mathbb{P}(T \geqslant k) \,, \quad \forall k \geqslant 0 \,,$$

i to na dva načina: (i) direktno, po definiciji uvjetne vjerojatnosti, te (ii) koristeći interpretaciju geometrijske razdiobe kao model za broj neuspjeha prije prvog uspjeha u nizu nezavisnih pokusa.

(b) Pokažite da je $G_0(p)$ jedina razdioba na $\mathbb{N}_0$ koja ima gornje svojstvo zaboravljivosti.

Zadatak 3.15. Bacamo simetričan novčić.

(a) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PG?
(b) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PP?

Zadatak 3.16. U zdjeli se nalazi n špageta. U svakom koraku, dok god je to moguće, odaberemo nasumičan par krajeva špageta te spojimo odabrane krajeve. Ako odabrani krajevi pripadaju istom špagetu, tada spajanjem nastaje petlja. Koji je očekivani broj petlji na kraju ovog procesa? *Uputa:* Koristite indikatore.

Zadatak 3.17. Neka je $G = (V, E)$ konačan graf. Za $W \subseteq V$ i $e \in E$ definiramo

$$I_W(e) = \begin{cases} 1\,, & \text{ako } e \text{ povezuje } W \text{ i } W^c, \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$ ukupan broj bridova koji povezuju W i W^c, pokažite da nužno postoji $W \subseteq V$ takav da je $N_W \geqslant |E|/2$.

Uputa: Slučajno obojajte vrhove u dvije boje te gledaje podskup vrhova iste boje. Iskoristite činjenicu da za slučajnu varijablu X, $\mathbb{E}[X] \geqslant c$ povlači da je nužno $\mathbb{P}(X \geqslant c) > 0$.

Zadatak 3.18. U kutiji imamo m_1 bijelih i m_2 crvenih kuglica. Slučajno odaberemo $n \leqslant m_1 + m_2 =: N$ kuglica te s X označimo ukupan broj izvučenih bijelih kuglica; X dakle ima hipergeometrijsku razdiobu.

(a) Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[\binom{X}{2}\right] = \binom{m_1}{2} \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}\,.$$

Uputa: Koristite indikatore.

(b) Koristeći (a) dio pokažite (mukotrpnim računom) da je

$$\mathrm{Var}(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}\,,$$

gdje je $p := \frac{m_1}{m_1+m_2}, q := 1 - p$. Kakva je dakle varijanca u odnosu na $B(n, p)$ razdiobu?

Zadatak 3.19. Neka je π uniformno slučajno odabrana permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$. U ovisnosti o n odredite očekivani broj ciklusa u π.

Rješenja zadataka: **Zad. 3.1** $\frac{1}{10}, \frac{71}{100}$; **Zad. 3.2** $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$; **Zad. 3.3** (i) $\alpha > 1, c = (\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-\alpha})^{-1}$, (ii) $\alpha > 2$; **Zad. 3.4** $B(n, p^2)$; **Zad. 3.5** (ii) ∞, (iii) $1 - (2q)^{L+1}$; **Zad. 3.6** 1, ∞; **Zad. 3.7** (i) 0.73728, (ii) 3; **Zad. 3.8** $\mathbb{E}[U] = \frac{n+1}{2}$, $\mathrm{Var}(U) = \frac{n^2-1}{12}$; **Zad. 3.9** ≈ 0.4627; **Zad. 3.10** (a) $365(1 - (364/365)^n)$, (b) $\binom{n}{2}/365$; **Zad. 3.12** $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$; **Zad. 3.13** $\frac{7}{2}$; **Zad. 3.15** (a) 4, (b) 6; **Zad. 3.16** $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{3} + 1$; **Zad. 3.19** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

POGLAVLJE 4

Diskretni slučajni vektori

ZADATAK 4.1. U kutiji se nalazi pet kuglica označenih brojevima od 1 do 5. Na slučajan način izvlačimo dvije različite kuglice i vraćamo ih natrag u kutiju. Pokus ponavljamo ukupno dva puta. S X označimo broj izvučenih kuglica s brojem 1, a s Y broj izvučenih kuglica s brojem 2.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y), te marginalne razdiobe od X i Y.
(b) Odredite razdiobu od Y uvjetno na $X = 0$. Prepoznajete li neku od standardnih razdioba? Je li rezultat intuitivno jasan?
(c) Odredite $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 2)$.

ZADATAK 4.2. Ako su $X \sim G(p_1)$ i $Y \sim G(p_2)$ nezavisne, odredite $\mathbb{P}(X > Y)$ i $\mathbb{P}(X = Y)$.

ZADATAK 4.3. Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Pokažite da su oni nezavisni akko su indikatori $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ nezavisne slučajne varijable. *Uputa:* Koristite tvrdnju da nezavisnost događaja $A_1, \ldots, A_n$ povlači nezavisnost događaja $B_1, \ldots, B_n$ pri čemu je $B_i = A_i$ ili A_i^c, za sve i.

ZADATAK 4.4. (i) Broj tiskarskih pogrešaka na stranici ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ, a brojevi na različitim stranicama su nezavisni. Koja je vjerojatnost da će se druga tiskarska pogreška dogoditi na k-toj stranici?
(ii) Lektor pregledava jednu stranicu tražeći tiskarske pogreške. Svaku pogrešku uoči s vjerojatnošću 1/2, i to nezavisno od drugih grešaka. Ako je broj uočenih grešaka točno 10, odredite distribuciju broja grešaka koje nisu primijećene.

ZADATAK 4.5. Neka su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λ i μ redom. Dokažite da je distribucija slučajne varijable X, uvjetno na događaj $X + Y = n$, binomna s parametrima n i $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

ZADATAK 4.6. Ako su $X, Y \sim \mathrm{G}_0(p)$ nezavisne, pokažite da za sve $m \in \mathbb{N}_0$, uvjetno na $X+Y = m$, X ima uniformnu razdiobu na skupu $\{0, 1, \ldots, m\}$. Je li rezultat intuitivno jasan? Što predstavlja $X + Y$?

ZADATAK 4.7. Ako su X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru i $m \in \mathbb{N}$, te vrijedi $\mathbb{E}[|X|^m], \mathbb{E}[|Y|^m] < \infty$, tada vrijedi i $\mathbb{E}[|X + Y|^m] < \infty$; na primjer, ako je $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) < \infty$, nužno je i $\mathrm{Var}(X + Y) < \infty$.

ZADATAK 4.8. Ako su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[(X - Y)^2\Big] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y])^2 \ ,$$

pri čemu pretpostavljamo da sva očekivanja postoje te da su varijance konačne.

Zadatak 4.9. U nizu od n nezavisnih pokusa, vjerojatnost uspjeha u i-tom pokusu je p_i.

(a) Ako je X ukupan broj uspjeha, odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Ako je $\overline{p} := \frac{1}{n}\sum_i p_i$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = n\overline{p}\,, \quad \mathrm{Var}(X) = n\overline{p}(1-\overline{p}) - \sum_i (p_i - \overline{p})^2\,.$$

Ako fiksiramo $\overline{p} \in (0,1)$, za koji izbor p_i-eva je varijanca najveća?

Zadatak 4.10 (**Rekordi**). n ljudi različitih visina na slučajan način stane u red. Za $k = 1,\dots,n$, neka $X_k \in \{1,2,\dots,k\}$ označava koje je po veličini k-ta osoba među prvih k ljudi; npr. $X_k = 2$ znači da postoji točno jedna osoba prije k-te osobe koja je viša od nje.

(a) Pokažite da diskretni slučajni vektor $(X_1,\dots,X_n)$ ima uniformnu distribuciju na skupu $S_n = \prod_{k=1}^n \{1,\dots,k\}$, tj. da je

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = \frac{1}{n!}\,,$$

za sve $(x_1,\dots,x_n) \in S_n$.

(b) Odredite distribucije slučajnih varijabli $X_1,\dots,X_n$ te pokažite da su one nezavisne.

(c) Kažemo da je osoba *rekordno visoka* ako je viša od svih ljudi koji se nalaze prije nje u redu. Neka je A_i događaj da je i-ta osoba u redu rekordno visoka. Pokažite da su događaji $A_1,\dots,A_n$ nezavisni, te odredite očekivanje i varijancu broj rekordno visokih osoba.

Zadatak 4.11. (a) Pretpostavimo da u kutiji imamo $m+n$ kuglica. Prvo slučajno odaberemo podskup od m kuglica i obojamo ih u bijelo, a ostalih n kuglica obojimo u crno, te nakon toga slučajno izvučemo k kuglica iz kutije. Ako je X broj izvučenih bijelih kuglica, odredite distribuciju od X.

(b) (*Simetrija* HG *razdiobe*) Pokažite da su razdiobe $\mathrm{HG}(m,n,k)$ i $\mathrm{HG}(k,m+n-k,m)$ iste. *Uputa:* Iskoristite (a).

(c) Ako je $X_n \sim \mathrm{HG}(m_n,n_n,k)$ pri čemu $m_n + n_n \to \infty$, ali tako da za neki $p \in [0,1]$ vrijedi

$$p_n := \frac{m_n}{m_n + n_n} \to p\,,$$

pokažite da za $X \sim \mathrm{B}(k,p)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X = i)\,, \quad \forall i = 0,\dots,k\,.$$

Možete li intuitivno objasniti ovaj rezultat?

Zadatak 4.12. Neka su X,Y,Z,W diskretne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru te takve da sve imaju konačan drugi moment. Pokažite da vrijedi

(a) $\mathrm{Cov}(X,Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$

(b) $\mathrm{Cov}(X+Y,Z+W) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)$.

Zadatak 4.13. Bacamo simetričnu kocku. Neka je X broj bacanja do pojave prve šestice, a Y broj bacanja do pojave treće šestice.

(a) Odredite diskretnu funkciju gustoće slučajnog vektora (X, Y).
(b) Odredite $\mathrm{Cov}(X, Y)$ i $\rho(X, Y)$.

Zadatak 4.14. Neka je Θ slučajan kut koji ima uniformnu razdiobu na skupu $\{\frac{k\pi}{4} : k = 0, \ldots, 7\}$, te $(X, Y) := (\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Pokažite da je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, ali da X i Y nisu nezavisne.

Zadatak 4.15 (**CS nejednakost**). (a) Neka je cijena benzina po litri u danom mjesecu slučajna varijabla X takva da je $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = 1$. S druge strane, mjesečna potrošnja vašeg auta (u litrama) je slučajna varijabla Y za koju vrijedi $\mathbb{E}[Y] = 30$ i $\mathrm{Var}(Y) = 5^2$. Pokažite da je očekivana vrijednost vašeg ukupnog mjesečnog troška na gorivo nužno unutar segmenta $[25, 35]$.

(b) Ako je X nenegativna slučajna varijabla, pokažite da za svaki $k \geqslant 1$ vrijed $\mathbb{E}[X^k]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^{2k}]$.

Zadatak 4.16. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable s očekivanjem $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ te $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Odredite $\mathbb{E}[S_n]$ za $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$, gdje je $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$; S_n je jedan mogući procjenitelj za varijancu σ^2. Imate li ideju za alternativni procjenitelj varijance?

Zadatak 4.17 (**Monte Carlo metoda i kontrolne varijate**). Pretpostavimo da je parametar $\theta \in \mathbb{R}$ nepoznat, ali da ga možemo zapisati kao $\theta = \mathbb{E}[X]$ pri čemu je X slučajna varijabla koju znamo simulirati, te da vrijedi $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X) < \infty$. Za procjenitelj $\overline{X}_n$ znamo da vrijedi $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \theta$ i $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Pretpostavimo da postoji slučajna varijabla Z takva da je $\mathrm{Cov}(X, Z) < 0$, te da **znamo** njeno očekivanje – BSOMP da je $\mathbb{E}[Z] = 0$ [inače samo uzmemo slučajnu varijablu $Z - \mathbb{E}[Z]$]. Htjeli bismo tu informaciju iskoristiti kako bi dobili bolji procjenitelj za θ?

(a) Neka je $\sigma_Z := \mathrm{Var}(Z) < \infty$, te $(X_1, Z_1), \ldots, (X_n, Z_n)$ njd slučajni vektori s istom distribucijom kao i (X, Z). Za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{R}$, definiramo procjenitelj

$$\widehat{\theta}_{n,\lambda} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i + \lambda Z_i) = \overline{X}_n + \lambda \cdot \overline{Z}_n\,.$$

Odredite $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_{n,\lambda}]$ i $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_{n,\lambda})$.

(b) Odredite $\lambda^* \in \mathbb{R}$ koji minimizira $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_{n,\lambda})$, te pokažite da vrijedi

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_{n,\lambda^*}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (1 - \rho(X, Z)^2) < \mathrm{Var}(\overline{X}_n)\,.$$

Ako je $\overline{Z}_n > 0$, je li $\widehat{\theta}_{n,\lambda^*}$ veće ili manje od $\overline{X}_n$? Je li to intuitivno jasno s obzirom na $\mathrm{Cov}(X, Z) < 0$?

Zadatak 4.18. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable za koje postoji očekivanje, te neka je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pokažite da je $\mathbb{E}[X_i \mid S_n = s] = \frac{s}{n}$, za sve $i = 1, \ldots, n$ i sve s takve da je $\mathbb{P}(S_n = s) > 0$. *Uputa:* Što možete reći o $\mathbb{E}[X_i \mid S_n = s]$ i $\mathbb{E}[X_j \mid S_n = s]$?

Zadatak 4.19. Neka je X broj dana u godini u kojima barem jedna osoba u grupi od 110 ljudi ima rođendan; pretpostavka je da imamo 365 dana u godini, te da svaka osoba nezavisno od ostalih može imati rođendan na bilo koji dan u godini s jednakom vjerojatnosti. Odredite $\mathrm{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite indikatore.

Zadatak 4.20. (a) Ako je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$, a $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. diskretnih slučajnih varijabli nezavisan od N, te $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$, pokažite da vrijedi

$$\mathrm{Var}(S_N) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2\mathrm{Var}(N)\,,$$

ukoliko je $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.

(b) Paralelno bacamo dvije simetrične kocke dok na prvoj ne padne šestica. Odredite očekivanje i standardnu devijaciju zbroja brojeva koji su pali na drugoj kocki.

Zadatak 4.21. Bacamo 10 simetričnih kocki, te označimo s X broj parnih brojeva, a s Y broj jedinica koje su pale.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) te $\rho(X, Y)$. Koje su marginalne razdiobe od X i Y, te jesu li X i Y nezavisne?
(b) Ako znamo da nije pala niti jedna trojka ili petica, kako to mijenja razdiobu od (X, Y)?
(c) Ako umjesto 10, bacamo $N \sim \mathrm{P}(10)$ kocki, te su ishodi bacanje kocki nezavisni od N, odredite zajedničku razdiobu od (X, Y).
(d) Ako je P broj prostih brojeva koji su pali, odredite $\rho(X, P)$.

Napomena: U (c) dijelu zapravo imamo multinomnu generalizaciju svojstva stanjivanja Poissonove slučajne varijable.

Zadatak 4.22. *Inverzija* u permutaciji π skupa $\{1, \ldots, n\}$ je par $i < j$ takav da je $\pi(i) > \pi(j)$. Odredite očekivanje i varijancu broja inverzija u slučajno odabranoj permutaciji. *Uputa:* Koristite indikatore.

Rješenja zadataka: **Zad. 4.1** (a) npr. $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{9}{100}, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{9}{50}$, te $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \sim Y$, (b) $\mathrm{B}(2, \frac{1}{2})$, (c) $\frac{87}{100}$; **Zad. 4.2** $\frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}, \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$; **Zad. 4.4** (a) $e^{-\lambda(k-1)}\big[2 - e^{-\lambda}(2 + \lambda) + \lambda(k-1)\big]$, (b) $\mathrm{P}(\lambda/2)$; **Zad. 4.10** (b) X_k ima uniformnu razdiobu na $\{1, \ldots, k\}$, (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$; **Zad. 4.13** (a) $f_{(X,Y)}(n, m) = \frac{(m-n-1)5^{m-3}}{6^m}$, za $m \geqslant n + 2, n \geqslant 1$, (b) 30; **Zad. 4.16** $(1 - \frac{1}{n})\sigma^2$; **Zad. 4.17** (b) $\lambda^* = \frac{-\mathrm{Cov}(X,Z)}{\mathrm{Var}(Z)} > 0$; **Zad. 4.19** $\mathrm{Var}(X) \approx 10.019$; **Zad. 4.20**(b) $21, \approx 19.62$; **Zad. 4.21** (a) $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \frac{10!}{a!b!(10-a-b)!}\left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^b \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-a-b}$, za $0 \leqslant a + b \leqslant 10$, $\rho(X, Y) = -\sqrt{1/5}$, $X \sim \mathrm{B}(10, 1/2), Y \sim \mathrm{B}(10, 1/6)$, (b) $\mathbb{P}(X = a, Y = b \mid A) = \frac{10!}{a!b!}\left(\frac{3}{4}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^b$, za $a, b \geqslant 0$, $a + b = 10$, (c) $X \sim \mathrm{P}(5), Y \sim \mathrm{P}(5/3)$ te su nezavisne, (d) $-\frac{1}{3}$. **Zad. 4.22** $\frac{n(n-1)}{4}, \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n(n-1)(n-2)}{36}$

POGLAVLJE 5

Neprekidne slučajne varijable

Zadatak 5.1. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite vrijednost konstante c i izračunajte $\mathbb{P}(X > 1)$.

Zadatak 5.2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2}, \quad \text{za sve } x > 0.$$

Odredite vrijednost konstante C i izračunajte $\mathbb{P}(X > 2)$ i $\mathbb{P}(1 < X < 3)$. Odredite funkciju gustoće f.

Zadatak 5.3. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, pronađite funkciju $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ takvu da slučajna varijabla $Y := f(U)$ ima razdiobu iz Zadatka 5.2.

Zadatak 5.4. (a) Neka je F funkcija distribucije takva da za neke $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, vrijedi da je F neprekidna i strogo rastuća funkcija na (a,b) t.d. je $F(a) = 0, F(b) = 1$ – specijalno, F je bijekcija sa (a,b) u $(0,1)$. Ako je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F, pokažite da $Y := F(X)$ ima $\mathrm{Unif}(0,1)$ razdiobu.

(b) Pokažite da rezultat ne mora vrijediti ako F nije neprekidna funkcija distribucije?

(c) Ako je $X \sim \mathrm{Exp}(1)$, pronađite funkciju $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ tako da $g(X)$ ima razdiobu iz Zadatka 5.2.

Zadatak 5.5. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(a,b)$, a $(c,d) \subseteq (a,b)$, odredite razdiobu slučajne varijable U uvjetno na događaj $\{U \in (c,d)\}$.

Zadatak 5.6. (a) Ako su F_1, F_2 dvije funkcije distribucije te $p \in [0,1]$ proizvoljan. Pokažite da je tada funkcija F zadana s $F(x) := pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$ također funkcija distribucije neke slučajne varijable. Ako znamo generirati slučajne varijable s funkcijom distribucije F_1, odnosno F_2, kako biste generirali slučajnu varijablu s funkcijom distribucije F?

(b) Bacamo nesimetričan novčić na kojemu je vjerojatnost da padne pismo jednaka $1/3$. Generiramo slučajnu varijablu X na sljedeći način: ako je novčić pokazao pismo, stavimo $X := 0$, a ako je pala glava generiramo $E \sim \mathrm{Exp}(2)$ slučajnu varijablu te stavimo $X := E$. Odredite funkciju distribucije od X. Je li X neprekidna slučajna varijabla? Je li diskretna?

ZADATAK 5.7. (a) Neka je R radijus slučajno odabrane točke iz jediničnog kruga. Odredite gustoću slučajne varijable R, te njeno očekivanje i varijancu. Ima li R uniformnu razdiobu na $(0,1)$?

(b) Neka je $R \sim \mathrm{Exp}(1)$, te A površina kruga s radijusom R. Odredite funkciju distribucije, gustoću, te očekivanje slučajne varijable A. *Uputa: Korisno je koristiti formulu* $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$ *koja zapravo vrijedi za proizvoljnu nenegativnu slučajnu varijablu* X.

ZADATAK 5.8. Ako je X neprekidna slučajna varijabla i $Y := aX + b$ za $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, pokažite da je Y neprekidna s gustoćom

$$f_Y(y) = f_X((y-b)/a) \cdot \frac{1}{|a|}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Možete pretpostaviti da je F_X diferencijabilna osim u najviše konačno mnogo točaka, te da je $F_X'(t) = f_X(t)$ za sve t gdje derivacija postoji.

ZADATAK 5.9. Pretpostavimo da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati. Kada bi student najkasnije trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću barem 95% ne zakasni na predavanje?

ZADATAK 5.10. Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ i $Y := |X|$ tzv. preklopljena (engl. *folded*) normalna slučajna varijabla.

(a) Odredite funkciju distribucije od Y, te ju izrazite u terminima funkcije distribucije Φ standardne normalne razdiobe. Ako je $\mu = -1$, $\sigma = 2$, te znate da je $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(2) \approx 0.98$, odredite $\mathbb{P}(Y < 3)$.

(b) Slučajna varijabla Y je neprekidna (to slijedi npr. jer joj je funkcija distribucije neprekidna, te diferencijabilna osim u konačno mnogo točaka) – odredite joj funkciju gustoće. Skicirajte gustoću ako je $\mu = \sigma = 1$; odavde dolazi ime "preklopljena".

(c) Pokažite da je

$$\mathbb{E}[Y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu\left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right],$$

te da je

$$\mathrm{Var}(Y) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbb{E}[Y]^2.$$

ZADATAK 5.11. Odredite $\mathrm{Var}(X)$ ako je

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

(b) $\mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha}$, za $x \geqslant 1$, te $\mathbb{P}(X > x) = 1$ za $x < 1$, pri čemu je $\alpha > 1$; kažemo da X ima Paretovu razdiobu s parametrom α. Inače se dopušta da je $\alpha > 0$ – zašto je ovdje potrebno da je $\alpha > 1$?

ZADATAK 5.12. (a) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F i funkcijom gustoće f.[1] Odredite funkciju distribucije i funkciju

[1] Smijete pretpostaviti da vrijedi $F'(t) = f(t)$ osim u najviše konačno mnogo $t \in \mathbb{R}$.

gustoće slučajnih varijabli $L_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$ i $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ u terminima F i f.

(b) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da L_n također ima eksponencijalnu razdiobu te joj odredite parametar. *Napomena:* Što ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne eksponencijalne, ali s različitim parametrima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$?

(c) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da je

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda}\,.$$

Možete li intuitivno objasniti rezultat s obzirom na rezultat iz (b) dijela i svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe?

Uputa: Pokažite da je $\mathbb{E}[M_k] - \mathbb{E}[M_{k-1}] = \frac{1}{k\lambda}$, za $k \geqslant 1$, tako što ćete koristeći formulu $\mathbb{E}[M_k] = \int_0^\infty \mathbb{P}(M_k > t)\mathrm{d}t$ u dobivenom izrazu prepoznati gustoću od M_k.

Rješenja zadataka: **Zad. 5.1** $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$; **Zad. 5.2** 1, e^{-4}, $e^{-1} - e^{-9}$, $f(x) = 2xe^{-x^2}$, $x > 0$, $f(x) = 0$, $x \leqslant 0$; **Zad. 5.3** npr. $f(u) = \sqrt{-\log u}$; 5.4 npr. $g(x) = \sqrt{x}$; **Zad. 5.5** $\mathrm{Unif}(c, d)$; **Zad. 5.6** $F(x) = (1 - \frac{2}{3}e^{-2x})1_{\{x \geqslant 0\}}$, ne, ne; **Zad. 5.7** (a) $f(r) = 2r, r \in [0, 1]$ (0 inače), $\mathbb{E}[R] = \frac{2}{3}$, $\mathrm{Var}(R) = \frac{1}{18}$, (b) $F(a) = (1 - e^{-\sqrt{a/\pi}})1_{\{a \geqslant 0\}}$, $\mathbb{E}[A] = 2\pi$; **Zad. 5.9** 11:23; **Zad. 5.11** (a) $1/\lambda^2$; (b) $+\infty$ za $\alpha \leqslant 2$, $\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, inače; **Zad. 5.11**(a) $F_{L_n}(t) = 1 - (1 - F(t))^n$, $f_{L_n}(t) = n(1 - F(t))^{n-1} f(t)$, $F_{M_n}(t) = F(t)^n$, $f_{M_n}(t) = nF(t)^{n-1} f(t)$, (b) $L_n \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

POGLAVLJE 6

Funkcije izvodnice

ZADATAK 6.1. Paralelno bacamo dvije simetrične kocke dok na prvoj ne padne šestica. Odredite FI vjerojatnosti $G(s)$ zbroja brojeva koji su pali na drugoj kocki, za $|s| < 1$.

ZADATAK 6.2. Uzastopno bacamo simetričnu kocku sve dok prvi put ne dobijemo dvije šestice zaredom – označimo s X potreban broj bacanja.

(a) Ako je $p_n := \mathbb{P}(X = n)$ za $n \geqslant 1$, pokažite da vrijedi

$$p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}p_{n-2}\,, \quad n \geqslant 3\,.$$

(b) Koristeći (a) dio, odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X te odredite očekivanje i standardnu devijaciju od X.

ZADATAK 6.3. Bacimo 6 simetričnih kocki, te s X označimo njihovu sumu. Odredite $\mathbb{P}(X = 18)$. *Uputa:* Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti $G_X(t)$ od X, razvijte je u red potencija (oko 0), te pronađite koeficijent koji stoji uz t^{18}.

ZADATAK 6.4. Neka slučajna varijabla X ima funkciju izvodnicu momenata M_X na $(-t_0, t_0)$. Pokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M(at)\,, \quad |t| \cdot |a| < t_0\,.$$

ZADATAK 6.5. Neka je X slučajna varijabla. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je

(a) $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$;

(b) $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. Koja je veza s FI vjerojatnosti G_X?

ZADATAK 6.6. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, za $\alpha, \lambda > 0$. Zaključite da za $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ i $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ vrijedi $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$. Uočite da ovaj rezultat i intuitivno ima smisla imajući u vidu da za $k \in \mathbb{N}$, suma k nezavisnih $\mathrm{Exp}(\lambda)$ slučajnih varijabli ima točno $\Gamma(k, \lambda)$ razdiobu. *Napomena:* Gustoća $\Gamma(\alpha, \lambda)$ razdiobe je

$$f_{\Gamma(\alpha,\lambda)}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

ZADATAK 6.7. Ako je $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, odredite $\mathbb{E}[Z^n]$, za sve $n \geqslant 1$. *Uputa:* Razvijte $M_Z(t)$ u red potencija oko 0.

ZADATAK 6.8. Slučajna varijabla X ima log-normalnu razdiobu s parametrima μ, σ^2 ako je $\log(X) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite funkciju izvodnicu momenata normalne slučajne varijable.

ZADATAK 6.9. Ako su $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, nezavisne te

$$\widehat{\mu}_n := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

procjenitelj za μ, izračunajte "grešku" $\mathbb{E}\Big[|\widehat{\mu}_n - \mu|\Big]$. Kako X_i-evi za koje je $\sigma_i \approx 0$, odnosno $\sigma_i \approx \infty$, utječu na $\widehat{\mu}_n$ i $\mathbb{E}\Big[|\widehat{\mu}_n - \mu|\Big]$? Usporedite s (naivnim) procjeniteljem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ (vidi predavanja). *Uputa:* Iz Zadatka 5.10 znamo da za $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ vrijedi $\mathbb{E}\Big[|Z|\Big] = \sigma\sqrt{2/\pi}$.

Rješenja zadataka: **Zad. 6.1** $\frac{s-s^7}{5s^7-41s+36}$; **Zad. 6.2(b)** $G_X(s) = \frac{s^2}{36-30s-5s^2}$, $|s| \leqslant 1$, $\mathbb{E}[X] = 42$, $\sigma(X) \approx 40.62$; **Zad. 6.3** $\frac{3431}{6^6}$; **Zad. 6.5** (a) $\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$ za $t \neq 0$, te 1 za $t = 0$, (b) $(q + pe^t)^n$, $t \in \mathbb{R}$; **Zad. 6.6** $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$, $t < \lambda$; **Zad. 6.7** $\mathbb{E}[Z^{2k}] = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$, $\mathbb{E}[Z^{2k-1}] = 0$, $k \geqslant 1$; **Zad. 6.8** $\mathbb{E}[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$, $\mathrm{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$; **Zad. 6.9** $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1/2}$.

POGLAVLJE 7

Nejednakosti i granični teoremi

ZADATAK 7.1. (a) Neka je X proizvoljna slučajna varijabla. Pokažite da za sve $a \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ vrijedi *Chernoffova* ograda:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = \frac{M_X(t)}{e^{ta}}.$$

(b) Neka je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$; odredite ograde na vjerojatnost $\mathbb{P}(|Z| \geqslant 3)$ koje daju Markovljeva, Čebiševljeva i Chernoffova nejednakost (uz optimalni t), te ih usporedite sa stvarnom vrijednosti te vjerojatnosti.

Uputa: Za Chernoffa iskoristite da je zbog simetrije $\mathbb{P}(|Z| > 3) = 2\mathbb{P}(Z > 3)$ (općenito imamo $\leqslant$), te je tipično dobra ideja izraz dobiven iz Chernoffove nejednakosti logaritmirati prije minimiziranja (pogotovo u (c) dijelu).

(c) Provedite postupak iz dijela (b) za vjerojatnost $\mathbb{P}(X \geqslant 75)$, gdje je $X \sim \mathrm{B}(100, \frac{1}{2})$. *Napomena:* Stvarna vrijednost je $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \approx 2.8 \cdot 10^{-7}$.

ZADATAK 7.2. Ako je $X_1, X_2, \dots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ i varijancom $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) < \infty$, koristeći Čebiševljevu nejednakost odredite vrijednost $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je sigurno $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| < 2\sigma) \geqslant 0.99$ za sve $n \geqslant n_0$.

ZADATAK 7.3. Neka je $X, X_1, X_2, \dots$ niz slučajnih varijabli definiran na istom vjerojatnosnom prostoru takav da za neki $p \geqslant 1$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[|X_n - X|^p\Big] = 0$ (kažemo da niz $(X_n)_{n\geqslant 1}$ L_p-konvergira prema X). Pokažite da tada $(X_n)_{n\geqslant 1}$ konvergira i po vjerojatnosti prema X.

ZADATAK 7.4. Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ograničena neprekidna funkcija, te $I := \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Ako je $Y_1, Y_2, \dots$ niz njd $\mathrm{Unif}(a,b)$ slučajnih varijabli, odredite funkciju h (ako postoji) tako da vrijedi

$$\widehat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(Y_i) \xrightarrow{\text{g.s.}} I\,, \quad \text{kada } n \to \infty\,.$$

(b) Nađite h u slučaju kada Y_i-evi imaju proizvoljnu gustoću g koja je pozitivna na (a,b).

Napomena: Gornje je glavna ideja tzv. *Monte Carlo integracije* – u praksi je cilj naći gustoću g za koju je $\mathrm{Var}(\widehat{I}_n)$ što manja.

ZADATAK 7.5. Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. slučajne varijable i $B \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan, ako postoji odredite g.s. limes niza $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in B\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

ZADATAK 7.6. (a) Pretpostavimo da vrijedi $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$ za slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti u otvorenom skupu $I \subseteq \mathbb{R}$, te da je $g : I \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\mathbb{P}(X \in$

$C_g) = 1$, gdje je C_g skup svih točaka $x \in I$ u kojima je g neprekidna (npr. to je uvijek zadovoljeno ako je g neprekidna na I). Pokažite da onda vrijedi i $g(X_n) \xrightarrow{\text{g.s.}} g(X)$.

Napomena: Ovaj rezultat naziva se *teorem o neprekidnom preslikavanju*, te zapravo vrijedi i ako umjesto konvergencije g.s. imamo konvergenciju po vjerojatnosti ili po distribuciji.

(b) Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. slučajne varijable s distribucijom $X_i \sim \text{Unif}(-1, 1)$, te neka je $X^{(n)} := (X_1, \dots, X_n) \in [-1, 1]^n$, $n \geqslant 1$. Ako je $|x| := (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ euklidska norma točke $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, odredite (ako postoji) g.s. limes niza $\frac{|X^{(n)}|}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$.

Napomena: Slučajni vektor $X^{(n)}$ ima (neprekidnu) uniformnu razdiobu na hiperkocki $[-1, 1]^n$, tj. vrijedi $\mathbb{P}(X^{(n)} \in A) = \lambda(A)/2^n$, za $A \subseteq \mathbb{R}^n$, gdje je $\lambda(A)$ "volumen" skupa A (dakle, $\lambda([-1, 1]^n) = 2^n$).

ZADATAK 7.7. Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koristeći aproksimaciju dobivenu iz CGT-a, odredite najmanji broj prolaznika koji treba proći ulicom da bi prosjak skupio barem 150 novčića s vjerojatnošću od barem 0.95? *Uputa:* Vrijedi $\Phi(1.65) \approx 0.95$.

ZADATAK 7.8. Na ispitu je 40 zadataka i za svaki su ponuđena četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen gubi se 5 bodova. Koristeći CGT aproksimirajte vjerojatnost da student koji slučajnim odabirom bira odgovore ostvari barem 120 bodova? *Uputa:* $\Phi(2.19) \approx 0.9857$.

ZADATAK 7.9. (a) Ako X_n ima Poissonovu razdiobu s parametrom n, za $n \geqslant 1$, pokažite da X_n za velike n približno ima normalnu razdiobu s očekivanjem n i standardnom devijacijom $\sqrt{n}$.

(b) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} .$$

ZADATAK 7.10. Svaki dan, vrijednost dionice raste 70% ili pada 50%, i to s jednakim vjerojatnostima te neovisno o prethodnim danima. Neka je Y_n cijena dionice nakon n dana, pri čemu je $Y_0 := 100$.

(a) Pokažite da za $a_n := \mathbb{E}[\log(Y_n)]$ i $b_n^2 := \text{Var}(\log(Y_n))$, $n \geqslant 1$, vrijedi da $\log(Y_n)$ za velike n približno ima $\text{N}(a_n, b_n^2)$ razdiobu, tj. da

$$\frac{\log(Y_n) - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z \sim \text{N}(0, 1) .$$

Odredite a_n i b_n.

(b) Odredite $\mathbb{E}[Y_n]$ za sve $n \geqslant 1$ te odredite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]$.

(c) Pokažite da $Y_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$ kada $n \to \infty$. *Uputa:* Napišite Y_n kao funkciju od U_n/n gdje je $U_n \sim \text{B}(n, \frac{1}{2})$.

ZADATAK 7.11 (*ne ispituje se). (a) (**Slutskyjev teorem**) Pretpostavimo da su slučajne varijable $X, X_1, X_2, \dots$ i $Y, Y_1, Y_2, \dots$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, te da vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{d} Y$, kada $n \to \infty$. Ako je $Y = c \in \mathbb{R}$ konstantna, pokažite da onda $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$, kada $n \to \infty$.

(b) Pokažite da ako Y nije konstantna slučajna varijabla, tvrdnja iz (a) dijela ne mora vrijediti.

Rješenja zadataka: **Zad. 7.1** (b) ≈ 0.27, 0.11, 0.022, (c) $\approx 0.66, 0.04, 2.1 \cdot 10^{-6}$; **Zad. 7.2** 25; **Zad. 7.4** (a) $h(y) = (b-a) \cdot f(y)$, (b) $h(y) = f(y)/g(y) \cdot 1_{\{y \in (a,b)\}}$; **Zad. 7.5** $\mathbb{P}(X_1 \in B)$; **Zad. 7.6** (b) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; **Zad. 7.7** 3421; **Zad. 7.8** 0.0143; **Zad. 7.9** (b) $\frac{1}{2}$; **Zad. 7.10**(a) $a_n \approx -0.081n$, $b_n \approx 0.61\sqrt{n}$, (b) $100 \cdot (1.1)^n$, $+\infty$.

POGLAVLJE 8

Neprekidni slučajni vektori

DODATI ZADATKE ZA VIŠEDIMENZIONALNU NORMALNU DISTRIBUCIJU.

Zadatak 8.1. Neka X i Y imaju zajedničku funkciju gustoće

$$f(x,y) = c(x+y)\,, \quad x,y \in (0,1)\,,$$

te $f(x,y) = 0$ inače.

(a) Odredite konstantu $c > 0$.

(b) Odredite $\mathbb{P}(X+Y \leqslant 1)$ – očekujete li da je ta vjerojatnost veća ili manja od $\frac{1}{2}$?

(c) Odredite $\mathbb{E}[X+Y]$.

(d) Odredite marginalne gustoće od X i Y. Jesu li X i Y nezavisne?

(e) Odredite uvjetnu gustoću od Y uz dano $X = x$, za $x \in (0,1)$.

Zadatak 8.2. Štap duljine 1 prelomimo na uniformno odabranom mjestu X. Uvjetno na $X = x \in (0,1)$, dio štapa $[0,x]$ ponovno prelomimo na uniformno odabranom mjestu Y. Na predavanjima smo pokazali da je zajednička gustoća

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in (0,1),\, y \in (0,x)\,,$$

te $f_{X,Y}(x,y) = 0$ za ostale (x,y). Odredite

(a) marginalnu gustoću od Y;

(b) gustoću od X uz dano $Y = y$, za $y \in (0,1)$ – intuitivno, očekujemo li da je to uniformna razdioba na $(y,1)$?

Zadatak 8.3. Neka su $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ i $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$ nezavisne. Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[|X-Y|\Big] = \frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}\,,$$

na dva načina:

(a) koristeći formulu za $\mathbb{E}[g(X,Y)]$, te

(b) koristeći jednakost $|X-Y| = \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$.
Uputa: Koristite formulu $\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)\,dz$, koja vrijedi za neprekidnu nenegativnu slučajnu varijablu Z.

Možete li intuitivno objasniti rezultat koristeći činjenicu da je $\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = X) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ te svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe?

Zadatak 8.4. Ako je (X,Y) neprekidan slučajan vektor, te $X,Y \geqslant 0$, dokažite da vrijedi

(a) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

(b) $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$ ako je $X \leqslant Y$. *Uputa:* Imamo $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X1_{\{X \leqslant Y\}}] = \mathbb{E}[g(X,Y)]$.

(c) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ ako su X i Y nezavisne.

Zadatak 8.5 (**Očekivanje** Beta **razdiobe**). Ako je $X \sim \mathrm{Beta}(a,b)$, za $a,b > 0$, pokažite da je $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$. *Uputa:* Iskoristite identitete

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

te $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, za sve $a,b > 0$.

Zadatak 8.6. Neka su $X_1,\ldots,X_n$ njd neprekidne slučajne varijable.

(a) Pokažite da je $\mathbb{P}(\{X_i \neq X_j\,,\ \ \forall i \neq j\}) = 1$.

(b) Odredite $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \ldots < X_{\pi(n)})$, za proizvoljnu permutaciju π skupa $\{1,\ldots,n\}$.

Zadatak 8.7. (a) Imamo n bijelih i jednu sivu kuglicu, te sve kuglice nezavisno i uniformno rasporedimo po segmentu $[0,1]$. Ako je X broj bijelih kuglica koje se nalaze s lijeve strane sive kuglice, pokažite da X ima uniformnu razdiobu na skupu $\{0,1,2,\ldots,n\}$, te zaključite da vrijedi

$$\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \frac{1}{n+1}\,,\quad \forall k = 0,\ldots,n\,.$$

Uputa: Mijenja li se razdioba od X ako prvo rasporedimo $n+1$ bijelih kuglica pa tek onda slučajno obojamo jednu od kuglica u sivo?

(b) Testiramo novi lijek za jednu bolest, koji ćemo ispitati na n pacijenata. Pretpostavimo da je parametar uspješnosti lijeka $P \in (0,1)$ slučajan, te da ima $\mathrm{Unif}(0,1)$ distribuciju. Uvjetno na $P = p$, svaki od n pacijenata bit će izliječen s vjerojatnošću p, nezavisno od ostalih. Označimo s N ukupan broj pacijenata kojima je lijek pomogao.

(b1) Odredite distribuciju slučajne varijable N u ovom modelu.

(b2) Pretpostavimo da je svih n pacijenata ozdravilo nakon što su primili lijek. Koliko je vjerojatnost da je $P > 0.5$?

Zadatak 8.8. Neka je Y Poissonova slučajna varijabla sa slučajnim parametrom Λ koji ima $\Gamma(\alpha,\beta)$ distribuciju, za $\alpha,\beta > 0$; gustoća $\Gamma(\alpha,\beta)$ razdiobe je

$$f_{\Gamma(\alpha,\beta)}(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}\,,\quad t \geqslant 0\,.$$

(a) Pokažite da uvjetno na ishod $Y = y$, za $y \in \mathbb{N}_0$, parametar Λ ponovno ima gama razdiobu, te joj odredite parametre. Za koje y je očekivanje aposteriorne razdiobe veće od $\mathbb{E}[\Lambda] = \frac{\alpha}{\beta}$?

(b) Ako je $\alpha \in \mathbb{N}$, pokažite da Y ima negativnu binomnu razdiobu na $\mathbb{N}_0$ te joj odredite parametre.

(c) Riješite (a) dio zadatka ako umjesto na $\{Y = k\}$, uvjetujemo na $\{Y_1 = y_1,\ldots,Y_n = y_n\}$ gdje su, uvjetno na $\Lambda = \lambda$, $Y_1,\ldots,Y_n$ njd slučajne varijable s $\mathrm{P}(\lambda)$ distribucijom, te $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljni. *Napomena:* Bayesova formula za neprekidnu slučajnu varijabli Λ i diskretan slučajan vektor $(Y_1, \dots, Y_n)$ glasi analogno kao za slučaj $n = 1$.

Zadatak 8.9 (**Uređajne statistike**). Medijan brojeva $x_1, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ je broj m koji je jednak nekom x_i za koji postoji n indeksa j takvih da je $x_j \leqslant m$ i n indeksa k takvih da je $x_k \geqslant m$. Na primjer, ako je $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n+1}$, tada je medijan $m = x_{n+1}$.

Neka su $X_1, \dots, X_{2n+1}$ njd slučajne varijable s $\mathrm{U}(0,1)$ razdiobom. Želimo odrediti funkciju gustoće njihovog medijana M.

(a) Možete pretpostaviti da je M neprekidna te da vrijedi $F_M'(x) = f_M(x)$ za sve $x \in (0,1)$. Zaključite da za sve $x \in (0,1)$ vrijedi

$$f_M(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(M \in (x-\epsilon, x+\epsilon))}{2\epsilon} \,.$$

(b) Ako je za $x \in (0,1)$ te $\epsilon > 0$ dovoljno mali,

$$\begin{aligned} A_{x,\epsilon} &:= \cup_{i \neq j} \{X_i, X_j \in (x-\epsilon, x+\epsilon)\} \\ &= \{\text{postoje barem dva } X_i\text{-a u } (x-\epsilon, x+\epsilon)\} \,, \end{aligned}$$

pokažite da je

$$\mathbb{P}(A_{x,\epsilon}) \leqslant \binom{n}{2} \epsilon^2 \,.$$

Zaključite da je

$$f_M(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(M \in (x-\epsilon, x+\epsilon), A_{x,\epsilon}^c)}{2\epsilon} \,.$$

(c) Pokažite da M ima $\mathrm{Beta}(n+1, n+1)$ razdiobu.

Rješenja zadataka: **Zad.** 8.1 (a) $c = 1$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{7}{6}$, (d) $f_X(x) = \frac{1}{2} + x$, $x \in (0,1)$, te $Y \sim X$, zavisne su, (e) $f_{Y|X=x}(y) = \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}$, $x \in (0,1)$.**Zad.** 8.2 (a) $f_Y(y) = \log\left(\frac{1}{y}\right)$, $y \in (0,1)$, (b) $f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{x \log(1/y)}$, $x \in (y,1)$; **Zad.** 8.6 (b) $\frac{1}{n!}$; **Zad.** 8.7 (b1) $\mathrm{Unif}(\{0,1,\dots,n\})$, (b2) $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$; **Zad.** 8.8 (a) $(\Lambda \mid Y = y) \sim \Gamma(\alpha + y, \beta + 1)$, $\mathbb{E}[\Lambda \mid Y = y] \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$ akko $y \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$, (b) $X \sim \mathrm{NB}(\alpha, \frac{\beta}{\beta+1})$, (c) $(\Lambda \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) \sim \Gamma(\alpha + n\overline{y}_n, \beta + n)$, gdje je $\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, a $\mathbb{E}[\Lambda \mid Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$ akko $\overline{y}_n \geqslant \mathbb{E}[\Lambda]$.