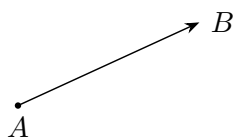


# Poglavlje 1

## Vektori

### Uvod

**Definicija:** *Orijentirana (usmjerena) dužina* je uređeni par dviju točaka. Točka  $A$  je početak, a točka  $B$  kraj usmjerene dužine koju označavamo s  $\overrightarrow{AB}$ . Strelicu crtamo od početka do kraja.



*Napomena.* Uočite da  $\overrightarrow{BA}$  nije isto što i  $\overrightarrow{AB}$ , dok  $\overline{AB}$  i  $\overline{BA}$  označavaju istu dužinu.

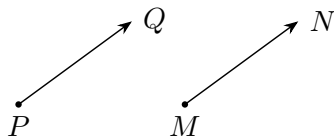
**Definicija:** *Usmjerena dužina ima smjer, duljinu i orijentaciju. Usmjerene dužine koje imaju sve tri značajke jednake predstavljaju isti vektor.*

*Napomena.* Radi jednostavnosti, vektor poistovjećujemo s orijentiranom dužinom i koristimo oznake:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{XY}$ ,  $\dots$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\dots$

**Primjer 1:**

1.  $MN$  i  $PQ$  su paralelni pravci  $\rightsquigarrow$  isti smjer.
2.  $\overline{MN}$  i  $\overline{PQ}$  imaju istu duljinu.
3. Strelice su na istom kraju  $\rightsquigarrow$  ista orijentacija.

Dakle, usmjerene dužine  $\overrightarrow{MN}$  i  $\overrightarrow{PQ}$  predstavljaju isti vektor.



**Primjer 2:** Neka je  $ABCD$  kvadrat sa središtem u točki  $O$ . Koje sve orijentirane dužine predstavljaju isti vektor?

Rješenje.

$$1) \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{DC}$$

$$5) \overrightarrow{AO} \text{ i } \overrightarrow{OC}$$

$$2) \overrightarrow{BC} \text{ i } \overrightarrow{AD}$$

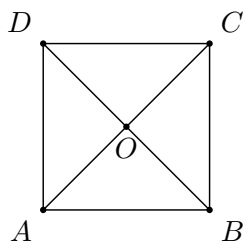
$$6) \overrightarrow{CO} \text{ i } \overrightarrow{OA}$$

$$3) \overrightarrow{CD} \text{ i } \overrightarrow{BA}$$

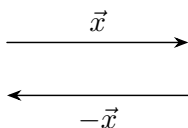
$$7) \overrightarrow{BO} \text{ i } \overrightarrow{OD}$$

$$4) \overrightarrow{DA} \text{ i } \overrightarrow{CB}$$

$$8) \overrightarrow{DO} \text{ i } \overrightarrow{OB}$$



**Definicija:** *Suprotni vektor* od vektora  $\vec{x}$  je vektor  $-\vec{x}$  istog smjera i duljine, ali suprotne orijentacije od vektora  $\vec{x}$ . Na primjer, suprotan vektor od  $\overrightarrow{AB}$  je  $\overrightarrow{BA}$ .

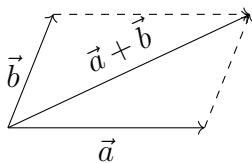


**Definicija:** *Modul (duljina)* vektora  $\vec{a}$ , u oznaci  $|\vec{a}|$ , je duljina dužine  $\overline{AB}$  koja reprezentira vektor  $\vec{a}$ .

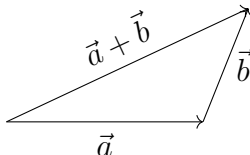
**Operacije s vektorima:**

1) **Zbrajanje vektora:**

- pravilo paralelograma



- pravilo trokuta



**Primjer 3:** Neka je  $ABCD$  kvadrat sa središtem u točki  $O$ . Odredite čemu je jednako:

$$1) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO},$$

2)  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ ,

3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ,

4)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OB}$ ,

5)  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ .

Rješenje.

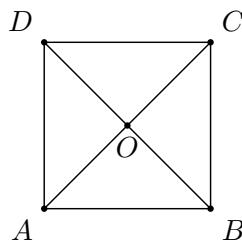
1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ ,

2)  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC}$ ,

3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ,

4)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$ ,

5)  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  **nulvektor**,



**Definicija:** *Nulvektor*  $\vec{0}$  je vektor kojemu je predstavnik bilo koja orijentirana dužina s istim početkom i krajem.

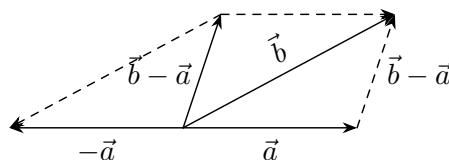
2) **Množenje vektora  $\vec{a}$  skalarom  $\alpha \in \mathbb{R}$ :**

Rezultat je vektor  $\alpha\vec{a}$  istog smjera kao i  $\vec{a}$ , duljine  $|\alpha| |\vec{a}|$ , za  $\alpha > 0$  je iste orijentacije, a za  $\alpha < 0$  suprotne orijentacije od  $\vec{a}$  (za  $\alpha = 0$  dobivamo nulvektor).

3) **Oduzimanje vektora:**

Oduzimanje vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{a}$  je zbrajanje vektora  $\vec{b}$  i suprotnog vektora  $-\vec{a}$ , tj.

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a}).$$

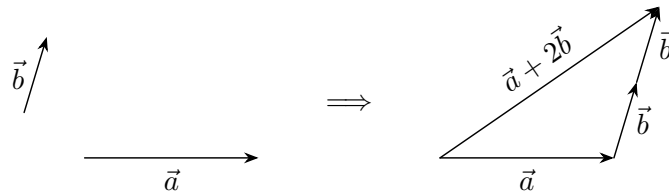


**Svojstva računanja s vektorima:**

1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost)

- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (asocijativnost)
- 3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  ( $\vec{0}$  je neutralni element za zbrajanje)
- 4)  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  (postojanje inverza za zbrajanje)
- 5)  $-(-\vec{a}) = \vec{a}$
- 6)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$  (distributivnost)
- 7)  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$  (distributivnost)

**Zadatak 1.1.** Nacrtajte  $\vec{a} + 2\vec{b}$  za dane  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .



**Zadatak 1.2.** Dokažite da vrijedi:

- (a)  $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ,
- (b)  $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ .

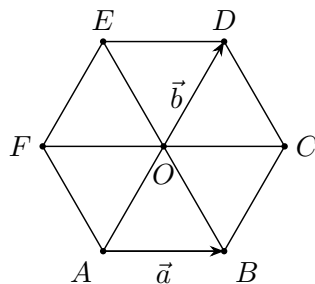
*Rješenje.*

- (a)  $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .
- (b)  $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ .

**Zadatak 1.3.** Neka je  $ABCDEF$  pravilni šesterokut te  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Izrazite  $\overrightarrow{BF}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  i  $\overrightarrow{DC}$  pomoću  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

*Rješenje.* Neka je točka  $O$  središte šesterokuta  $ABCDEF$ . Redom imamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{b}, \\ \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \\ \overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}.\end{aligned}$$



**Zadatak 1.4.** Neka je  $ABCD$  paralelogram i neka su  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$  i  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ . Izrazite vektore  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  i  $\overrightarrow{DA}$  pomoću vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

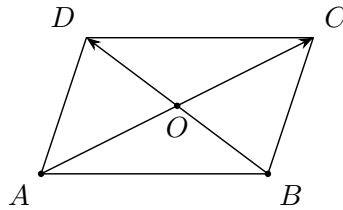
*Rješenje.* Neka je točka  $O$  sjecište dijagonala paralelograma  $ABCD$ . Redom imamo:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$



**Zadatak 1.5.** Neka je  $ABC$  trokut, a  $A_1, B_1, C_1$  polovišta njegovih stranica. Neka je  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ . Izrazite vektore  $\overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{BB_1}$  i  $\overrightarrow{CC_1}$  pomoću vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

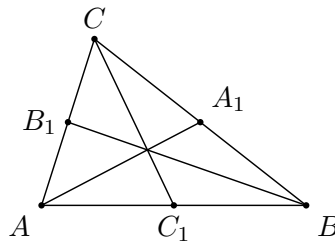
*Rješenje.*

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$



**Zadatak 1.6.** Neka je  $T$  težište trokuta  $ABC$ . Provjerite da je  $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \vec{0}$ .

*Rješenje.* Neka su  $A_1, B_1$  i  $C_1$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Težište  $T$  trokuta  $ABC$  je sjecište težišnica  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  i  $\overline{CC_1}$ .

Vrijedi da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta. Zbog toga imamo da je

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} \text{ i } \overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$$

Označimo s  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  i  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ . U zadatku 1.5 smo izračunali

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BB_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Konačno, imamo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \vec{0}.\end{aligned}$$

