MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 1

(6 bodova) U ovisnosti o parametrima $a, b \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & b \end{pmatrix}$$

i matrice A^2.

Rješenje. Imamo

$$\begin{pmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & b \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{treći redak dodamo drugom} \\ \text{i oduzmemo od prvog}\end{array} \sim \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 2a & 0 & a+b \\ a+b & b & b \end{pmatrix}$$

$$\sim \text{drugi stupac oduzmemo od prvog i trećeg} \sim \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 2a & 0 & a+b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c}\text{prvi redak dodamo trećem} \\ \text{i pomnožen s 2 dodamo drugom}\end{array} \sim \begin{pmatrix} -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \text{prvi redak oduzmemo od trećeg} \sim \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang posljednje matrice je točno broj nenul elemenata u njoj. Dakle, imamo

$$r(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (a,b) = (0,0), \\ 2, & \text{ako je } (a,b) \neq (0,0) \text{ i } (a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b), \\ 3, & \text{ako je } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ i } a \neq b. \end{cases}$$

Odavde odmah slijedi

$$r(A^2) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (a,b) = (0,0), \\ 3, & \text{ako je } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ i } a \neq b. \end{cases}$$

Promotrimo preostale slučajeve.

- Za $a = 0$ i $b \neq 0$ imamo
$$A = \begin{pmatrix} b & b & b \\ -b & -b & 0 \\ b & b & b \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} b^2 & b^2 & 2b^2 \\ 0 & 0 & -b^2 \\ b^2 & b^2 & 2b^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b^2 & b^2 & 2b^2 \\ 0 & 0 & -b^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
što je matrica ranga 2.
- Za $a \neq 0$ i $b = 0$ imamo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ a & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$
što je matrica ranga 2.
- Za $a = b \neq 0$ imamo
$$A = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 0 & -b & b \\ 2b & b & b \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & b^2 \\ 2b^2 & 2b^2 & 0 \\ 4b^2 & 2b^2 & 2b^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 2b^2 & 2b^2 & 0 \\ 2b^2 & 2b^2 & 2b^2 \end{pmatrix}$$
što je matrica ranga 2.

Dakle, $r(A^2) = r(A)$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 2

(5 bodova) Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

regularna? Za sve takve λ nađite joj inverz A^{-1}.

Rješenje. Pokušajmo naći inverz matrice A elementarnim transformacijama redaka. Imamo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda-1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-6 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Radili smo samo elementarne transformacije redaka koje ne mijenjaju determinantu i došli smo do gornjetrokutaste matrice pa očitavamo $\det A = 2 - \lambda$. Dakle, A je regularna ako i samo ako je $\lambda \neq 2$.

Nastavljamo dalje tražiti A^{-1} uz pretpostavku $\lambda \neq 2$.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\lambda-2} & -\frac{-1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3\lambda-8}{\lambda-2} & \frac{3-\lambda}{\lambda-2} & \frac{3\lambda-8}{\lambda-2} & \frac{-1}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{\lambda-6}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{-1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{array}\right).$$

Dakle, za $\lambda \neq 2$ inverz je dan s

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ \frac{3\lambda-8}{\lambda-2} & \frac{3-\lambda}{\lambda-2} & \frac{3\lambda-8}{\lambda-2} & \frac{-1}{\lambda-2} \\ \frac{-4}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{\lambda-6}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ \frac{2}{\lambda-2} & \frac{-1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{pmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 3

(5 bodova) Izračunajte determinantu matrice reda n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ n+1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Prvih $n-1$ redaka množimo s -1 i dodajemo zadnjem retku, pa radimo Laplaceov razvoj po zadnjem retku. Dakle

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1} 2 \cdot n! + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} 2 \cdot n! + (-1)^{n+1} (n-1)! =$$

$$(-1)^{n+1}(n-1)!(2n+1).$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 4

(a) (2 boda) Zadan je sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}+2x_4} = 3 \\ x_1 \phantom{{}+x_2+3x_3} + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Pokažite da je sustav Cramerov te odredite vrijednost nepoznanice x_3 rješenja tog sustava.

(b) (2 boda) Dokažite ili opovrgnite: ako je za matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n1}(\mathbb{R})$ sustav $AX = B$ rješiv, tada je i sustav $A^T X = B$ rješiv.

Rješenje:

(a) Sustav je Cramerov akko je matrica sustava regularna (kvadratna). Računamo njenu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{razvoj 2. redak}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 2 \cdot 8 = 8 \neq 0,$$

pa vidimo da sustav zaista je Cramerov. Za vrijednost x_3 rješenja ovog sustava računamo

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

što se može dobiti direktnim računom, ili tako da se uoči da je $3S_1 - S_3 = S_4$. Dakle, nepoznanica x_3 u rješenju sustava je jednaka 0.

Napomena: Rješenje u kojem je samo izračunata vrijednost x_4 bez ikakvog komentara o tome zašto je sustav Cramerov nosi 1 bod. Alternativno se moglo i samo riješiti sustav Gaussovim eliminacijama, ali također je potrebno dati isti komentar za matricu (bilo preko njene regularnosti, ili jedinstvenosti rješenja).

(b) Prema Kroenecker-Cappellijevom teoremu o rješivosti sustava, sustav $AX = B$ je rješiv akko je $r(A \,|\, B) = r(A)$. Stoga je ekvivalentno provjeriti mora li iz te pretpostavke nužno vrijediti i

$$r(A^T \mid B) = r(A^T),$$

odnosno, zbog $r(A^T) = r(A)$,

$$r(A^T \mid B) = r(A \,|\, B).$$

Međutim, ovdje lako vidimo da matrice

$$A = E_{12}, \qquad B = E_1$$

ne zadovoljavaju gornju jednakost, pa tvrdnja općenito ne vrijedi.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka su $A, B \in M_4$ matrice za koje vrijedi $\det A = 2$ i $\det B = \mathrm{r}(B)$. Odredite $\det(AB)$ i $\mathrm{r}(AB)$.

Rješenje:

Ako je $1 \leq \mathrm{r}(B) \leq 3$ onda je matrica B singularna pa bi joj determinanta morala biti 0. Dakle, ti slučajevi ne mogu nastupiti.

Preostaju slučajevi $\det B = \mathrm{r}(B) = 0$ i $\det B = \mathrm{r}(B) = 4$. U prvom slučaju jasno je da imamo $B = 0$ pa je i $AB = 0$ - dakle, i trag i determinanta od AB su jednaki 0.

U drugom slučaju matrica B je regularna. Zato je $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A) = 4$ jer A je po pretpostavci regularna. Nadalje, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 2 \cdot 4 = 8$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 1

(6 bodova) U ovisnosti o parametrima $a, b \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & -a \\ a-b & -b & b \\ b & b & -a \end{pmatrix}$$

i matrice A^2.

Rješenje. Imamo

$$\begin{pmatrix} a+b & b & -a \\ a-b & -b & b \\ b & b & -a \end{pmatrix} \sim \substack{\text{prvi redak dodamo drugom} \\ \text{i oduzmemo od trećeg}} \sim \begin{pmatrix} a+b & b & -a \\ 2a & 0 & b-a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \substack{\text{treći redak dodamo prvom} \\ \text{i pomnožen s 2 dodamo drugom}} \sim \begin{pmatrix} b & b & -b \\ 0 & 0 & b-a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \substack{\text{drugi stupac oduzmemo od prvog} \\ \text{i dodamo trećem}} \sim \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b-a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang posljednje matrice je točno broj nenul elemenata u njoj. Dakle, imamo

$$r(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (a,b) = (0,0), \\ 2, & \text{ako je } (a,b) \neq (0,0) \text{ i } (a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b), \\ 3, & \text{ako je } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ i } a \neq b. \end{cases}$$

Odavde odmah slijedi

$$r(A^2) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (a,b) = (0,0), \\ 3, & \text{ako je } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ i } a \neq b. \end{cases}$$

Promotrimo preostale slučajeve.

- Za $a = 0$ i $b \neq 0$ imamo

$$A = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ -b & -b & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ b^2 & b^2 & -b^2 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ b^2 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  što je matrica ranga 2.

- Za $a \neq 0$ i $b = 0$ imamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

  što je matrica ranga 2.

- Za $a = b \neq 0$ imamo

$$A = \begin{pmatrix} 2b & b & -b \\ 0 & -b & b \\ b & b & -b \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 3b^2 & 0 & 0 \\ b^2 & 2b^2 & -2b^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3b^2 & 0 & 0 \\ b^2 & 2b^2 & 0 \\ b^2 & -b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

  što je matrica ranga 2.

Dakle, $r(A^2) = r(A)$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 2

(5 bodova) Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

regularna? Za sve takve λ nađite joj inverz A^{-1}.

Rješenje. Pokušajmo naći inverz matrice A elementarnim transformacijama redaka. Imamo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-6 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Radili smo samo elementarne transformacije redaka koje ne mijenjaju determinantu i došli smo do gornjetrokutaste matrice pa očitavamo $\det A = 2 - \lambda$. Dakle, A je regularna ako i samo ako je $\lambda \neq 2$.

Nastavljamo dalje tražiti A^{-1} uz pretpostavku $\lambda \neq 2$.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-2} & -\frac{1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda-2} & \frac{-\lambda}{\lambda-2} & \frac{-2\lambda}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{\lambda-6}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-2} & -\frac{1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{array}\right).$$

Dakle, za $\lambda \neq 2$ inverz je dan s

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{\lambda-2} & \frac{-\lambda}{\lambda-2} & \frac{-2\lambda}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ \frac{-2}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{\lambda-6}{\lambda-2} & \frac{-2}{\lambda-2} \\ \frac{1}{\lambda-2} & \frac{-1}{\lambda-2} & \frac{2}{\lambda-2} & \frac{1}{\lambda-2} \end{pmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 3

(5 bodova) Izračunajte determinantu matrice reda n:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ n+1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Zadnjih $n-1$ stupaca množimo s -1 i dodajemo prvom stupcu, pa radimo Laplaceov razvoj po prvom stupcu. Dakle

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} 2 \cdot n! = (-1)^{n+1} 2 \cdot n!/2 + (-1)^{n+1} 2 \cdot n! =$$

$(-1)^{n+1} 3 \cdot n!$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 4

(a) (2 boda) Zadan je sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Pokažite da je sustav Cramerov te odredite vrijednost x_4 rješenja tog sustava.

(b) (2 boda) Dokažite ili opovrgnite: ako je za matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n1}(\mathbb{R})$ sustav $AX = B$ rješiv, tada je i sustav $A^T X = B$ rješiv.

Rješenje: Rješenje je analogno prvoj grupi: matrica sustava je dobivena jednom zamjenom stupaca, pa je determinanta jednaka -8, dok će kod računanja D_4 vrijediti relacija $2S_1 - S_2 = S_4$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 2. veljače 2023.

ZADATAK 5

(5 bodova) Neka su $A, B \in M_4$ matrice za koje vrijedi $\det A = 2$ i $\det B = \mathrm{r}(B)$. Odredite $\det(AB)$ i $\mathrm{r}(AB)$.

Rješenje:

Ako je $1 \leq \mathrm{r}(B) \leq 3$ onda je matrica B singularna pa bi joj determinanta morala biti 0. Dakle, ti slučajevi ne mogu nastupiti.

Preostaju slučajevi $\det B = \mathrm{r}(B) = 0$ i $\det B = \mathrm{r}(B) = 4$. U prvom slučaju jasno je da imamo $B = 0$ pa je i $AB = 0$ - dakle, i trag i determinanta od AB su jednaki 0.

U drugom slučaju matrica B je regularna. Zato je $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A) = 4$ jer A je po pretpostavci regularna. Nadalje, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 2 \cdot 4 = 8$.